

Generalized principal eigenvalues for indefinite-weight elliptic problems

Yehuda PINCHOVER

Department of Mathematics, Technion-Israel Institute of Technology, 32000 Haifa, ISRAEL.
E-mail: pincho@tx.technion.ac.il

Abstract

In this paper we prove a necessary and a sufficient condition for the existence of a positive solution of the equation $(P - \mu W)u = 0$ in Ω , where P is a critical, second-order, linear elliptic operator which is defined on a subdomain Ω of a noncompact Riemannian manifold X . It is assumed that $W \in C^\alpha(\Omega)$ is a “weak” perturbation and $\mu < 0$ is small enough.

Valeurs propres principales généralisées pour des problèmes elliptiques à poids indéfinis

Résumé

Dans cette Note nous prouvons une condition nécessaire et une condition suffisante pour l’existence d’une solution positive de l’équation $(P - \mu W)u = 0$ dans Ω , où P est un opérateur elliptique linéaire, critique, de deuxième ordre, qui est défini sur un sous-domaine Ω d’une variété Riemannienne X non compacte. Nous supposons que $W \in C^\alpha(\Omega)$ est une perturbation “faible” et $\mu < 0$ est suffisamment petit.

Version française abrégée

Considérons le système quantique $H_\mu = -\Delta - \mu V$ dans \mathbb{R}^d , où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre spectral et $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $V \not\equiv 0$. Il est bien connu que pour $d \geq 3$, l’opérateur de Schrödinger H_μ n’a pas d’état borné à condition que $|\mu|$ soit suffisamment petit. D’autre part, pour $d = 1, 2$, B. Simon a prouvé le résultat délicat suivant (*voir* [8, 7])

Théorème 1.1 *Supposons que $d = 1, 2$. Alors H_μ a une valeur propre négative pour tous μ négatifs si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^d} V(x)dx \leq 0$.*

L'explication du phénomène ci-dessus est fortement reliée aux notions suivantes: soit P un opérateur elliptique linéaire de deuxième ordre, défini sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ou d'une façon plus générale, $\Omega \subseteq X$, où X est une variété Riemannienne connexe non compacte et lisse de dimension d . Ici P est un opérateur elliptique avec des coefficients réels, continus au sens de Hölder, qui sont de la forme

$$P(x, \partial_x) = - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_i + c(x)$$

dans un système quelconque de coordonnées $(U; x_1, \dots, x_d)$. Nous dénotons le cône de toutes les solutions positives (classiques) de l'équation elliptique $Pu = 0$ dans Ω par $\mathcal{C}_P(\Omega)$.

L'opérateur P est appelé *sous-critique dans Ω* si P admet une fonction de Green positive minimale, $G_P^\Omega(x, y)$ dans Ω . P est appelé *critique dans Ω* , s'il existe une solution positive de l'équation $Pu = 0$ dans Ω , mais P n'admet pas de fonction de Green positive dans Ω . L'opérateur P est appelé *sur-critique* si $\mathcal{C}_P(\Omega) = \emptyset$ (voir [4] et aussi [9] où la notion de criticalité a été introduite pour la première fois pour les opérateurs de Schrödinger).

Il s'ensuit que P est critique (sous-critique, respectivement) dans Ω si et seulement si son adjoint formel, P^* est critique (sous-critique, respectivement) dans Ω . En plus, si P est critique dans Ω , alors $\mathcal{C}_P(\Omega)$ est un cône unidimensionnel. Dans ce cas $\phi \in \mathcal{C}_P(\Omega)$ est appelé un *état fondamental P dans Ω* [1].

Le fait d'être sous-critique est une propriété stable au sens suivant: si P est sous-critique dans Ω et $V \in C_0^\alpha(\Omega)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $P - \mu V$ est sous-critique pour tous $|\mu| < \epsilon$. D'autre part, si P est critique dans Ω et $V \in C^\alpha(\Omega)$ est une fonction non négative, non nulle, pour n'importe quel $\epsilon > 0$ l'opérateur $P + \epsilon V$ est sous-critique et $P - \epsilon V$ est sur-critique dans Ω .

Notons que $P = -\Delta$ est critique dans \mathbb{R}^d si $d = 1, 2$, et sous-critique pour $d \geq 3$. En plus, l'opérateur de Schrödinger H_μ considéré dans le Théorème 1.1 a une valeur propre négative si et seulement si H_μ est sur-critique.

Dans [5] l'auteur étend le Théorème 1.1 au cas d'une perturbation à support compact d'un opérateur elliptique critique, général, (non autoadjoint), défini dans un domaine Ω .

Théorème 1.3 *Soit P un opérateur elliptique critique dans Ω et soit ϕ_0 (respectivement $\tilde{\phi}_0$) l'état fondamental de l'opérateur P (respectivement P^*) dans Ω . Supposons que $W \in C_0^\alpha(\Omega)$. Il existe alors $\mu < 0$ tel que $P - \mu W(x)$ est sous-critique dans Ω si et seulement si*

$$\int_{\Omega} W(x) \phi_0(x) \tilde{\phi}_0(x) dx > 0.$$

Le but de cette Note est d'étendre le Théorème 1.3 pour une classe étendue et presque optimale de perturbations que nous appelons *perurbations faibles* (voir [6] pour les preuves complètes).

Considérons une variété riemannienne X , connexe, non compacte, de classe C^3 et de dimension d . Nous associons à tout sous-domaine $\Omega \subseteq X$ un recouvrement $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ (ce

que veut dire une suite de domaines relativement compacts, lisses $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ et $\cup_{n=1}^\infty \Omega_n = \Omega$ et une suite de fonctions régulières $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ dans Ω telles que $\chi_n(x) \equiv 1$ sur Ω_n , $\chi_n(x) \equiv 0$ sur $\Omega \setminus \Omega_{n+1}$, et $0 \leq \chi_n(x) \leq 1$ in Ω . Nous dénotons $W_n(x) = \chi_n(x)W(x)$ et $W_n^*(x) = W(x) - W_n(x)$.

Definition 2.1 Soit P un opérateur sous-critique dans $\Omega \subseteq X$. Une fonction $W \in C^\alpha(\Omega)$ est appelée *une perturbation faible* de l'opérateur P dans Ω s'il existe $N \in \mathbb{N}$ pour chaque $\eta \in \mathbb{R}$, tel que l'opérateur $P - \eta W_n^*(x)$ est sous-critique dans Ω pour $n \geq N$ quelconque.

Une fonction $W \in C^\alpha(\Omega)$ est appelée *une perturbation faible* de l'opérateur critique P dans Ω s'il existe une fonction non négative, non nulle, $V \in C_0^\alpha(\Omega)$ telle que la fonction W est une perturbation faible de l'opérateur sous-critique $P + V$ in Ω .

Remarques 2.2 1. Dans [4, 3] les notions de *petites* et *semi-petites perturbations* d'opérateurs sous-critiques ont été introduites et étudiées. Il suit que si W est une perturbation petite ou même semi-petite d'un opérateur P dans Ω , alors $|W|$ est une perturbation faible de P dans Ω . En particulier, des perturbations d'ordre zéro, du type considéré récemment par A. Ancona [2] sont faibles.

2. Soit $d \geq 3$. Par rapport à la borne de Cwikel, Lieb et Rozenblum, si $V, W \in L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ alors $|W|$ est une perturbation faible d'un opérateur de Schrödinger critique ou sous-critique $-\Delta + V$ dans \mathbb{R}^d et aussi une perturbation faible d'un opérateur critique ou sous-critique $P + V$, où P est un opérateur sous-critique symétrique à coefficients périodiques dans \mathbb{R}^d . En plus, si $W \in L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ mais $\int_{\mathbb{R}^d} W(y)(1 + |y|)^{2-d} dy = \infty$ alors W n'est pas une (semi) petite perturbation de $-\Delta$ dans \mathbb{R}^d .

Nous prouvons

Théorème 3.1 Soit P un opérateur critique dans Ω et $W \in C^\alpha(\Omega)$ une perturbation faible de l'opérateur P dans Ω , où $0 < \alpha \leq 1$. Soit $x_0 \in \Omega_1$ un point de référence fixé. Dénotons par ϕ_0 (respectivement $\tilde{\phi}_0$) l'état fondamental de l'opérateur P (respectivement P^*) dans Ω , de façon que $\phi_0(x_0) = 1$ (respectivement $\tilde{\phi}_0(x_0) = 1$). Supposons que $W\phi_0\tilde{\phi}_0 \in L^1(\Omega)$.

(i) S'il existe $\mu < 0$ tel que $P - \mu W(x)$ est sous-critique dans Ω alors

$$\int_{\Omega} W(x)\phi_0(x)\tilde{\phi}_0(x)dx > 0.$$

(ii) Supposons que pour une fonction non négative, non nulle, $V \in C_0^\alpha(\Omega)$ il existe $\mu_0 < 0$ et une constante C , positive tels que

$$G_{P+V-\mu W}^\Omega(x, x_0) \leq C\phi_0(x) \quad \text{and} \quad G_{P+V-\mu W}^\Omega(x_0, x) \leq C\tilde{\phi}_0(x)$$

pour tous $x \in \Omega \setminus \Omega_1$ et $\mu_0 \leq \mu < 0$. Si $\int_{\Omega} W(x)\phi_0(x)\tilde{\phi}_0(x)dx > 0$ il existe $\mu < 0$ tels que $P - \mu W(x)$ est sous-critique dans Ω .

1 Introduction

Consider the quantum mechanical system $H_\mu = -\Delta - \mu V$ in \mathbb{R}^d , where $\mu \in \mathbb{R}$ is a spectral parameter and $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $V \not\equiv 0$. It is well known that for $d \geq 3$, the Schrödinger operator H_μ has no bound states provided that $|\mu|$ is sufficiently small. On the other hand, for $d = 1, 2$, B. Simon proved the following delicate result (see [8, 7])

Theorem 1.1 *Suppose that $d = 1, 2$. Then H_μ has a negative eigenvalue for all negative μ if and only if $\int_{\mathbb{R}^d} V(x) dx \leq 0$.*

The explanation of the above phenomena is closely related to the following notions: Let P be a linear, second-order, elliptic operator defined in a domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ or more generally, $\Omega \subseteq X$, where X is a smooth, noncompact, connected, Riemannian manifold of dimension d . Here P is an elliptic operator with real Hölder continuous coefficients which in any coordinate system $(U; x_1, \dots, x_d)$ has the form

$$P(x, \partial_x) = - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_i + c(x). \quad (1.1)$$

We denote the cone of all positive (classical) solutions of the elliptic equation $Pu = 0$ in Ω by $\mathcal{C}_P(\Omega)$.

The operator P is said to be *subcritical* in Ω if P admits a minimal positive Green function $G_P^\Omega(x, y)$ in Ω . P is said to be *critical* in Ω if there exists a positive solution of the equation $Pu = 0$ in Ω but P does not admit a positive minimal Green function in Ω . The operator P is said to be *supercritical* if $\mathcal{C}_P(\Omega) = \emptyset$ (see [4] and also [9] where the notion of criticality was first introduced for Schrödinger operators).

It follows that P is critical (resp. subcritical) in Ω if and only if its formal adjoint P^* is critical (resp. subcritical) in Ω . Furthermore, if P is critical in Ω then $\mathcal{C}_P(\Omega)$ is a one dimensional cone. In this case $\phi \in \mathcal{C}_P(\Omega)$ is called a *ground state of P in Ω* [1].

Subcriticality is a stable property in the following sense. If P is subcritical in Ω and $V \in C_0^\alpha(\Omega)$ then there exists $\epsilon > 0$ such that $P - \mu V$ is subcritical for all $|\mu| < \epsilon$. On the other hand, if P is critical in Ω and $V \in C^\alpha(\Omega)$ is a nonzero, nonnegative function then for any $\epsilon > 0$ the operator $P + \epsilon V$ is subcritical and $P - \epsilon V$ is supercritical in Ω .

Note that $P = -\Delta$ is critical in \mathbb{R}^d if $d = 1, 2$, and subcritical for $d \geq 3$. Moreover, the Schrödinger operator H_μ considered in Theorem 1.1 has a negative eigenvalue if and only if H_μ is supercritical.

Recall also the following key lemma [5, Theorem 3.1].

Lemma 1.2 *Consider the one-parameter family of operators $P_t = P + tW + (1-t)V$, where $V, W \in C^\alpha(\Omega)$ and $0 \leq t \leq 1$. Suppose that $\mathcal{C}_{P_i}(\Omega) \neq \emptyset$, $i = 0, 1$. Then $\mathcal{C}_{P_t}(\Omega) \neq \emptyset$ for all $0 < t < 1$. Moreover, P_t is subcritical in Ω for all $0 < t < 1$ unless $P_0 = P_1$ and P_0 is critical in Ω .*

In [5] the author extended Theorem 1.1 to the case of a compactly supported perturbation of a general (non-selfadjoint), critical elliptic operator of the form (1.1) defined in a domain Ω .

Theorem 1.3 *Let P be a critical elliptic operator in Ω and let ϕ_0 (resp. $\tilde{\phi}_0$) be the ground state of the operator P (resp. P^*) in Ω . Assume that $W \in C_0^\alpha(\Omega)$. Then there exists $\mu < 0$ such that $P - \mu W(x)$ is subcritical in Ω if and only if*

$$\int_{\Omega} W(x)\phi_0(x)\tilde{\phi}_0(x)dx > 0.$$

The aim of this paper is to extend the Theorem 1.3 to a wider and almost optimal class of perturbation which we call *weak perturbation* (for complete proofs see [6]).

2 Weak perturbation

In this section we introduce the notion of *weak perturbation* and study some properties of such kind of perturbations.

Consider a noncompact, C^3 -smooth Riemannian manifold X of dimension d . We associate to any subdomain $\Omega \subseteq X$ an exhaustion of Ω (i.e. a sequence of smooth, relatively compact domains $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ such that $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ and $\cup_{n=1}^\infty \Omega_n = \Omega$) and a sequence $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ of smooth cutoff functions in Ω such that $\chi_n(x) \equiv 1$ in Ω_n , $\chi_n(x) \equiv 0$ in $\Omega \setminus \Omega_{n+1}$, and $0 \leq \chi_n(x) \leq 1$ in Ω . Let $W \in C^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$. We denote $W_n(x) = \chi_n(x)W(x)$ and $W_n^*(x) = W(x) - W_n(x)$.

Definition 2.1 Let P be a subcritical operator in $\Omega \subseteq X$. A function $W \in C^\alpha(\Omega)$ is said to be a *weak perturbation* of the operator P in Ω if for every $\eta \in \mathbb{R}$ there exists $N \in \mathbb{N}$ such that the operator $P - \eta W_n^*(x)$ is subcritical in Ω for any $n \geq N$.

A function $W \in C^\alpha(\Omega)$ is said to be a *weak perturbation* of a critical operator P in Ω if there exists a nonzero, nonnegative function $V \in C_0^\alpha(\Omega)$ such that the function W is a weak perturbation of the subcritical operator $P + V$ in Ω .

Remarks 2.2 1. In [4, 3] the notions of *small* and *semismall perturbations* of subcritical operators were introduced and studied. It follows that if W is a small or even semismall perturbation of an operator P in Ω then $|W|$ is a weak perturbation of P in Ω . In particular, zero-order perturbations of the type considered recently by A. Ancona [2] are weak.

2. Let $d \geq 3$. By the Cwikel-Lieb-Rozenblum bound, if $V, W \in L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ then $|W|$ is a weak perturbation of a critical or subcritical Schrödinger operator $-\Delta + V$ in \mathbb{R}^d and also a weak perturbation of a critical or subcritical operator $P + V$, where P is a symmetric subcritical operator with periodic coefficients in \mathbb{R}^d . Furthermore, if $W \in L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ but $\int_{\mathbb{R}^d} W(y)(1 + |y|)^{2-d}dy = \infty$ then W is not a (semi) small perturbation of $-\Delta$ in \mathbb{R}^d .

Using Lemma 1.2 one can prove easily the following lemma

Lemma 2.3 (i) *If W is a weak perturbation of a subcritical operator P in Ω then there exists $\epsilon > 0$ such that the operator $P - \mu W(x)$ is subcritical in Ω for any $|\mu| < \epsilon$. Moreover, if the operator $P - \mu W$ is subcritical in Ω then there exists $\delta > 0$ such that $P - (\mu + t)W$ is subcritical in Ω for all $|t| < \delta$.*

(ii) If W is a weak perturbation of a critical or subcritical operator P in Ω and for some $\mu \in \mathbb{R}$ the operator $P - \mu W(x)$ is subcritical or critical in Ω then W is also a weak perturbation of the operator $P - \mu W(x)$ in Ω .

Lemma 1.2 and Lemma 2.3 imply that

Lemma 2.4 *Let P be a subcritical or critical operator in Ω and $V \in C^\alpha(\Omega)$ be a nonzero, nonnegative function. Define*

$$\mu_+(\lambda, V) = \sup\{\mu \in \mathbb{R} | \mathcal{C}_{P-\lambda V-\mu W}(\Omega) \neq \emptyset\},$$

$$\mu_-(\lambda, V) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} | \mathcal{C}_{P-\lambda V-\mu W}(\Omega) \neq \emptyset\}.$$

Assume that W is a weak perturbation of P in Ω . If $|\mu_\pm(0, V)| < \infty$ then the operator $P - \lambda V - \mu_\pm(\lambda, V)W$ is critical in Ω for all $\lambda \leq 0$. Moreover, for every $\lambda < 0$, $\mu_-(\lambda, V) < 0 < \mu_+(\lambda, V)$ and if P is subcritical then we also have $\mu_-(0, V) < 0 < \mu_+(0, V)$.

3 Proof of the main theorem

In this section we state and prove our main result which extends Theorem 1.3 (where the perturbation W is a function with compact support) to the case of a weak perturbation.

Theorem 3.1 *Let P be a critical operator in Ω and $W \in C^\alpha(\Omega)$ a weak perturbation of the operator P in Ω , where $0 < \alpha \leq 1$. Let $x_0 \in \Omega_1$ be a fixed reference point. Denote by ϕ_0 (resp. $\tilde{\phi}_0$) the ground state of the operator P (resp. P^*) in Ω such that $\phi_0(x_0) = 1$ (resp. $\tilde{\phi}_0(x_0) = 1$). Assume that $W\phi_0\tilde{\phi}_0 \in L^1(\Omega)$.*

(i) *If there exists $\mu < 0$ such that $P - \mu W(x)$ is subcritical in Ω then*

$$\int_{\Omega} W(x)\phi_0(x)\tilde{\phi}_0(x)dx > 0. \quad (3.1)$$

(ii) *Assume that for some nonnegative, nonzero function $V \in C_0^\alpha(\Omega)$ there exists $\mu_0 < 0$ and a positive constant C such that*

$$G_{P+V-\mu W}^\Omega(x, x_0) \leq C\phi_0(x) \quad \text{and} \quad G_{P+V-\mu W}^\Omega(x_0, x) \leq C\tilde{\phi}_0(x) \quad (3.2)$$

for all $x \in \Omega \setminus \Omega_1$ and $\mu_0 \leq \mu < 0$. If the integral condition (3.1) holds true then there exists $\mu < 0$ such that $P - \mu W(x)$ is subcritical in Ω .

Remarks 3.2 1. Small perturbations and semismall perturbations of both P and P^* satisfy assumption (3.2).

2. Recently, T. Weidl [10] proved an abstract result on the number of bound states appearing below the spectrum of a semi-bounded *symmetric* operator in Hilbert space in the case of a “weak” non-signdefined perturbation. As an application he considered a perturbation of a critical Schrödinger operator $H = -\Delta - \beta_0 V$ by a function W in \mathbb{R}^d . It is assumed that there exist $\beta > \beta_0 > 0$ and $\alpha > 0$ such that the negative spectra of the

operators $H = -\Delta - \beta V$ and $H = -\Delta - \beta_0 V - \alpha|W|$ are finite. Under some additional assumptions it is shown ([10, Theorem 8.1]) that the statement of Theorem 1.3 holds true. Note that in Theorem 3.1 we have no assumption on the critical operator P but only on the perturbation W . On the other hand, if W is a weak perturbation of a subcritical or critical Schrödinger operator H then the negative spectrum of $H - \alpha W$ is finite for all $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proof of Theorem 3.1: (i) Suppose first that $P - \mu W$ is subcritical for some $\mu < 0$. By Lemma 2.3 (ii), W is also a weak perturbation of the operator $P - \mu W$ in Ω . Consequently, there exists N_0 such that for every $n \geq N_0$ the operator $P - \mu W + \mu W_n^* = P - \mu W_n$ is subcritical in Ω . Since the function W_n has compact support, Theorem 1.3 implies that for all $n \geq N$

$$\int_{\Omega} W_n(x) \phi_0(x) \tilde{\phi}_0(x) dx > 0. \quad (3.3)$$

By our assumption, the function $W \phi_0 \tilde{\phi}_0$ is integrable in Ω . Thus, using the Lebesgue dominated convergence theorem we obtain

$$\int_{\Omega} W(x) \phi_0(x) \tilde{\phi}_0(x) dx \geq 0. \quad (3.4)$$

Strict inequality in (3.4) follows as in the proof of Theorem 1.4 in [5].

(ii) Assume now that

$$\int_{\Omega} W(x) \phi_0(x) \tilde{\phi}_0(x) dx > 0 \quad (3.5)$$

and suppose that $\mu_-(0, V) = 0$, where $V \in C_0^\alpha(\Omega)$ is a nonnegative, nonzero function. In particular, W changes sign in Ω and therefore, $\mu_-(\lambda, V) > -\infty$ for any $\lambda \leq 0$. Lemma 2.4 implies that if $\lambda < 0$ then $\mu_-(\lambda, V) < 0$ and furthermore, the operator $P - \lambda V - \mu_-(\lambda, V)W$ is critical in Ω . Denote by $\phi_{(\lambda, -)}(x)$ (resp. $\tilde{\phi}_{(\lambda, -)}(x)$) the ground state of the operator $P - \lambda V - \mu_-(\lambda, V)W$ (resp. $P^* - \lambda V - \mu_-(\lambda, V)W$) such that $\phi_{(\lambda, -)}(x_0) = 1$ (resp. $\tilde{\phi}_{(\lambda, -)}(x_0) = 1$).

Note that, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \mu_-(\lambda, V) = \mu_-(0, V) = 0$. Recall [4] that if $\lambda < 0$ and $|\lambda|$ is sufficiently small, then both $\phi_{(\lambda, -)}(x)$ and $G_{P + V - \mu_-(\lambda, V)W}^\Omega(x, x_0)$ are positive solutions of minimal growth in a neighborhood of infinity in Ω of the equation $(P - \mu_-(\lambda, V)W(x))u = 0$. Using our assumption (3.2), the Harnack inequality and the generalized maximum principle we infer that there exist $\lambda_1 < 0$ and a constant $C_1 > 0$ such that

$$\phi_{(\lambda, -)}(x) \leq C_1 \phi_0(x) \quad \text{and} \quad \tilde{\phi}_{(\lambda, -)}(x) \leq C_1 \tilde{\phi}_0(x) \quad (3.6)$$

for every $\lambda_1 \leq \lambda < 0$ and all $x \in \Omega$. In particular, $W \phi_{(\lambda, -)} \tilde{\phi}_{(\lambda, -)} \in L^1(\Omega)$. On the other hand, for every $\lambda < 0$ the operator $P - \lambda V$ is subcritical while $P - \lambda V - \mu_-(\lambda, V)W$ is critical in Ω . Moreover, W is a weak perturbation of the operator $P - \lambda V - \mu_-(\lambda, V)W$. Consequently, by the first part of the theorem for all $\lambda_1 \leq \lambda < 0$ we have

$$\int_{\Omega} W(x) \phi_{(\lambda, -)}(x) \tilde{\phi}_{(\lambda, -)}(x) dx < 0. \quad (3.7)$$

Recall that, $\lim_{\lambda \rightarrow 0_-} \mu_-(\lambda, V) = \mu_-(0, V) = 0$. Moreover, ϕ_0 (resp. $\tilde{\phi}_0$) is the unique positive normalized solution of the equation $Pu = 0$ (resp. $P^*u = 0$) in Ω . Using the Harnack inequality and elliptic Schauder estimates it follows that as $\lambda \nearrow 0$ the functions $\phi_{(\lambda, -)}$ (resp. $\tilde{\phi}_{(\lambda, -)}$) converge uniformly in any compact subset of Ω to ϕ_0 (resp. $\tilde{\phi}_0$).

Consequently, inequalities (3.6), (3.7) and the Lebesgue dominated convergence theorem imply that $\int_{\Omega} W(x)\phi_0(x)\tilde{\phi}_0(x)dx \leq 0$ which contradicts our assumption (3.5). \square

Acknowledgments

This research was supported by the Fund for the Promotion of Research at the Technion.

References

- [1] **Agmon S., 1982.** On positivity and decay of second order elliptic equations on Riemannian manifolds, in “Methods of Functional Analysis and Theory of Elliptic Equations” (Greco D., ed.), Liguori, Naples, pp. 19–52.
- [2] **Ancona A., 1997.** First eigenvalues and comparison of Green’s functions for elliptic operators on manifolds or domains, *J. Analyse Math.*, **72**, pp. 45–92.
- [3] **Murata M., 1997.** Semismall perturbations in the Martin theory for elliptic equations, *Israel J. Math.*, **102**, pp. 29–60.
- [4] **Pinchover Y., 1989.** Criticality and ground states for second-order elliptic equations, *J. Differential Equations*, **80**, pp. 237–250.
- [5] **Pinchover Y., 1990.** On criticality and ground states for second order elliptic equations, II, *J. Differential Equations*, **87**, pp. 353–364.
- [6] **Pinchover Y., 1998.** On principal eigenvalues for indefinite-weight elliptic problems, in “Spectral and Scattering Theory” (A. G. Ramm, ed.), Plenum, New York, 13 pp, to appear.
- [7] **Reed M. and Simon B., 1978.** “Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators,” Academic Press, New York.
- [8] **Simon B., 1976.** The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions, *Ann. Physics*, **97**, pp. 279–288.
- [9] **Simon B., 1981.** Large time behavior of the L^p norm of Schrödinger semigroups, *J. Funct. Anal.*, **40**, pp. 66–83.
- [10] **Weidl T., 1997.** Remarks on virtual bound states for semi-bounded operators, preprint.