НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Панеях, П. Панеях

Локальные задачи для общего гиперболического дифференциального уравнения в ограниченных областях на плоскости немногочисленны, хорошо изучены и в простейшей ситуации включаются практически в любой курс уравнений с частными производными. Напротив, нелокальные задачи (даже и более общие, чем граничные) остаются до сих пор практически неизученными, хотя весьма разнообразные задачи такого сорта успешно рассматриваются в связи с эллиптическими и параболическими уравнениями. В настоящей работе рассматриваются две нелокальные квазиграничные задачи достаточно общего вида в характеристическом прямоугольнике для уравнений описанного вида. В обоих случаях найдены условия однозначной разрешимости задач, а также (впервые в теории гиперболических уравнений) условия их фредгольмовости. Как показывают примеры, приводимые условия являются точными: их несоблюдение приводит иногда к задачам, не обладающим требуемыми свойствами разрешимости. Доказательства (в своей неаналитической части) проводятся в рамках теории возмущений линейных операторов в банаховых пространствах.

Оглавление

Введение

В настоящей работе рассматривается строго гиперболический оператор P второго порядка в ограниченной области D пространства $\mathbb{R}^2$. Одной из важнейших задач, относящихся к этому оператору, и с разных точек зрения интересных как с позиций чистой, так и с позиций прикладной математики, представляется сопоставление ему некоторого оператора $\mathcal{B}$, с которым задача

$$\begin{cases} Pu = f & \text{в } D, \\ \mathcal{B}u = \varphi & \text{в } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

оказывается хорошо поставленной (в смысле Адамара). Множество Γ здесь, как обычно, представляет собой некоторое подмножество в замыкании $\overline{D}$ области D, с $\dim \Gamma < 2$. Классическими примерами подобных задач (1) являются задача Коши и задача Гурса для оператора P в характеристическом треугольнике. Если не считать смешанную задачу, то этим и ограничивается список хорошо поставленных (и хорошо изученных) задач для общего гиперболического уравнения второго порядка на плоскости. Характерной особенностью отмеченных задач является то, что в них *множество* Γ *расположено на границе* ∂D области D, и значение функции φ в любой точке $p \in \Gamma$ полностью определяется значениями функции u и ее первых производных в *той же точке* p. Такие задачи принято называть *локальными граничными задачами*. Чтобы расширить класс изучаемых задач (1), сопоставим каждой точке $p \in \Gamma$ из области определения функции φ такое множество $\omega_p \subset D$, что значение $\varphi(p)$ полностью определяется значениями функции u на ω_p.

Определение. Задача (1) будет называться *нелокальной*, если $\omega_p \neq \{p\}$ хотя бы для одной точки p, и *сильно нелокальной*, если $\dim \omega_p > 0$ для некоторой точки p.

Определение. Если ω_p не содержится целиком в граничном множестве ∂D для некоторой точки p, то задача (1) называется *квазиграничной*.

Объектом изучения в настоящей работе являются квазиграничные нелокальные и сильно нелокальные задачи, и поэтому мы воздержимся от немедленной иллюстрации введенных определений примерами. Отметим только, что обсуждаемые задачи неоднократно исследовались в рамках теории эллиптических и параболических дифференциальных уравнений (см., например, [1, 2]). Этого нельзя сказать о гиперболических уравнениях даже на плоскости, хотя отдельные попытки рассмотрения некоторых нелокальных задач предпринимались [3]. Исходя из той роли, которую гиперболические дифференциальные уравнения играют в математической физике, можно было бы ожидать наличия разнообразных нелокальных задач, продиктованных естествознанием и техникой. Авторам, однако, не удалось регулярными методами найти в литературе что-нибудь подобное. Поэтому в данной работе мы ограничились изучением только двух задач довольно общего вида. Оказалось, что обе задачи однозначно разрешимы в достаточно малых областях (образованных характеристиками рассматриваемого гиперболического оператора) независимо от коэффициентов оператора P. Этот результат неулучшаем в классе всех таких операторов, как показывают примеры, приводимые в тексте статьи.

Следующий (по своим положительным качествам) тип разрешимости задачи (1) характеризуется свойством фредгольмовости. В обеих рассматриваемых задачах мы находим условия, гарантирующие фредгольмовость соответствующей задачи (1). Эти условия также оказываются точными: их нарушение в случае некоторых операторов $\mathcal{B}$ приводит к бесконечномерным ядрам или коядрам задачи.

Методы, применяемые в этой работе, являются типичными методами теории линейных операторов в банаховых пространствах, в комбинации со специфическими аналитическими приемами, связанными с природой изучаемых операторов. Авторы не оставляют надежды, что появление работ, в которых решаются нелокальные задачи для гиперболических уравнений, окажет стимулирующее воздействие на экспертов в прикладной математике, которые объяснят, какие задачи такого типа представляют интерес для практических дисциплин.

§ 1. Сильно нелокальная квазиграничная задача

1.1. Обозначения и формулировка задачи

На протяжении всей работы мы используем следующие обозначения:

$$I_x = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant X\}, \quad I_y = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant Y\}, \quad D = I_x \times I_y.$$

Символ $\mathcal{W}$ используется для обозначения функционального пространства

$$\{w(x,y) \mid \partial_x w \in C(D),\ \partial_y w \in C(D),\ \partial_x \partial_y w \in C(D)\}.$$

С введением нормы

$$\|w\| = |w| + |\partial_x w| + |\partial_y w| + |\partial_x \partial_y w|,$$

где

$$|w| = \max_{(x,y)\in D} |w(x,y)|,$$

линейное пространство $\mathcal{W}$ становится банаховым пространством.

В настоящей главе мы рассматриваем следующую нелокальную квазиграничную задачу, в которой $K_1(x)$ и $K_2(y)$ являются функциями, интегрируемыми на интервалах I_x и I_y, соответственно:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \partial_x \partial_y u + a\partial_x u + b\partial_y u + cu = f \quad \text{в int } D, \\ \displaystyle\int_0^X K_1(x) u(x,y)\,dx = \psi(y), \quad y \in I_y, \\ \displaystyle\int_0^Y K_2(y) u(x,y)\,dy = \varphi(x), \quad x \in I_x. \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что все функции $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$ и $f = f(x, y)$ непрерывны в D, а функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ дифференцируемы на I_x и I_y. Введем обозначения

$$\kappa_1 = \int\limits_0^X K_1(x)dx, \quad \kappa_2 = \int\limits_0^Y K_2(y)dy.$$

С задачей $(\mathcal{P})$ мы ассоциируем линейный оператор

$$\mathcal{P} = (\mathcal{L},\ \mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2),$$

действующий из пространства $\mathcal{W}$ в пространство

$$\mathcal{V} = C(D) \times C^1(I_x) \times C^1(I_y),$$

в котором

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, y) = \partial_x \partial_y u + a(x, y)\partial_x u + b(x, y)\partial_y u + c(x, y)u, \\ \mathcal{K}_1 u(y) = \displaystyle\int\limits_0^X K_1(x)u(x, y)\, dx, \\ \mathcal{K}_2 u(x) = \displaystyle\int\limits_0^Y K_2(y)u(x, y)\, dy. \end{cases}$$

В операторной форме задача $(\mathcal{P})$ имеет вид

$$\mathcal{P}u = (f, \varphi, \psi),$$

и наша задача состоит в установлении свойств обратимости оператора $\mathcal{P}$.

1.2. Модельная задача

Задача, рассматриваемая в настоящем пункте, представляет собой весьма частный случай общей задачи $(\mathcal{P})$. Однако ее решение позволяет, во-первых, получить некоторые необходимые условия разрешимости этой общей задачи, а во-вторых, ввести изучение последней задачи в рамки теории возмущений ограниченных операторов в банаховых пространствах. Рассматриваемый в настоящем пункте оператор $\mathcal{P}_0$ как раз и играет в дальнейшем роль «возмущаемого» оператора.

Итак, рассмотрим задачу $(\mathcal{P})$ в случае

$$a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0 \quad \text{в} \ D,$$

т. е. задачу

$$\begin{cases} \partial_x \partial_y u = f & \text{в } \operatorname{int} D, \\ \int\limits_0^X K_1(x) u(x,y) dx = \psi(y) & \text{на } I_y, \\ \int\limits_0^Y K_2(y) u(x,y) dy = \varphi(x) & \text{на } I_x. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим отвечающий ей оператор: $u(x,y) \to \Big(f(x,y), \varphi(x), \psi(y)\Big)$ через $\mathcal{P}_0$. Умножая первое интегральное условие в (2) на $\mathcal{K}_2(y)$, а второе интегральное условие на $\mathcal{K}_1(x)$ и интегрируя результаты по I_y и I_x, соответственно, мы находим, что

$$\int\limits_0^X \int\limits_0^Y K_2(y) K_1(x) u(x,y) dy dx = \int\limits_0^X K_1(x) \varphi(x) dx,$$

$$\int\limits_0^X \int\limits_0^Y K_2(y) K_1(x) u(x,y) dy dx = \int\limits_0^Y K_2(y) \psi(y) dy.$$

Это приводит к первому *необходимому условию разрешимости задачи* (2) (и, тем более, разрешимости общей задачи $(\mathcal{P})$):

функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ удовлетворяют условию совместности

$$\int\limits_0^X K_1(x) \varphi(x) dx = \int\limits_0^Y K_2(y) \psi(y) dy. \tag{3}$$

Таким образом, оператор $\mathcal{P}$ (а также $\mathcal{P}_0$) отображает пространство $\mathcal{W}$ в пространство $C(D) \times F$, где

$$F = \left\{ (\varphi, \psi) \in C^1(I_x) \times C^1(I_y) \,\middle|\, \int\limits_0^X K_1(x) \varphi(x)\, dx = \int\limits_0^Y K_2(y) \psi(y)\, dy \right\}.$$

Отметим, что множество F представляет собой замкнутое подпространство в прямом произведении $C^1(I_x) \times C^1(I_y)$.

Предложение 1.1. *Задача* (2) *имеет единственное решение $u \in \mathcal{W}$ для любой правой части $(f, \varphi, \psi) \in \mathcal{V}$, удовлетворяющей условию* (3), *в том и только в том случае, если $\kappa_1 \kappa_2 \neq 0$. Сверх того, при выполнении последнего условия обратный оператор, соответствующий задаче* (2), *ограничен.*

Доказательство. Мы докажем вначале, что при выполнении условия $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$ однородное уравнение $\mathcal{P}_0 u = 0$ имеет только тривиальное решение. После этого в предположении $\kappa_1\kappa_2 = 0$ будут предъявлены ненулевые решения того же уравнения. Итак, пусть функция $u(x,y)$ является решением задачи

$$\partial_x\partial_y u = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^X K_1(x)u(x,y)dx = 0, \tag{5}$$

$$\int_0^Y K_2(y)u(x,y)dy = 0 \tag{6}$$

и пусть $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$. Интегрируя уравнение (4) по y и по x последовательно, мы находим его общее решение в виде

$$u(x,y) = f(x) + g(y), \quad (x,y) \in D, \tag{7}$$

где $f \in C^1(I_x)$ и $g \in C^1(I_y)$ — произвольные функции. Подставляя выражение (7) для $u(x,y)$ в соотношения (5) и (6), мы получаем

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^X K_1(x)f(x)\,dx + \kappa_1 g(y) & = 0, \\ \displaystyle\int_0^Y K_2(y)g(y)\,dy + \kappa_2 f(x) & = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\lambda_1 = \lambda_1(f) := \int_0^X K_1(x)f(x)dx, \quad \lambda_2 = \lambda_2(g) := \int_0^Y K_2(y)g(y)dy.$$

Тогда общее решение системы уравнений (8) имеет вид

$$g(y) = -\frac{\lambda_1}{\displaystyle\int_0^X K_1(x)dx} = -\frac{\lambda_1}{\kappa_1} := C_1, \quad f(x) = -\frac{\lambda_2}{\displaystyle\int_0^Y K_2(y)dy} = -\frac{\lambda_2}{\kappa_2} := C_2.$$

Таким образом, произвольное решение $u(x,y)$ задачи (4)–(6) совпадает с функцией $f(x) + g(y) = C_1 + C_2$. Другими словами, $u(x,y) \equiv \text{const}$. Подставляя это значение $u(x,y)$ в (6) или (5) и пользуясь тем, что $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$, мы находим, что $u(x,y) \equiv 0$.

Пусть теперь $\kappa_1\kappa_2 = 0$. Если

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0,$$

то, очевидно, любая константа представляет собой решение задачи (4)–(6).

Если же

$$\kappa_1 = 0, \qquad \kappa_2 \neq 0,$$

то для любой функции $g(y) \in C_1(I_y)$ функция

$$u(x,y) = g(y) - \frac{\int\limits_0^Y K_2(y)g(y)dy}{\int\limits_0^Y K_2(y)dy}$$

является решением той же задачи. Аналогично обстоит дело в случае

$$\kappa_1 \neq 0, \quad \kappa_2 = 0.$$

Таким образом, предположение 1.1 доказано в части единственности. Остается проверить существование решения задачи (2) при произвольной правой части $\big(f(x,y),\ \varphi(x),\ \psi(y)\big)$.

Очевидно, что общее решение дифференциального уравнения в задаче (2) может быть представлено в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t)dt\,ds + u_1(x) + u_2(y). \tag{9}$$

И все, что остается сделать, это определить функции $u_1(x)$ и $u_2(y)$ так, чтобы удовлетворялись дополнительные условия в (2). Подставляя функцию $u(x,y)$ из (9) в (2), мы получаем систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_0^X \Big[u_1(\xi) + u_2(y) + \int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)dt\,ds\Big] K_1(\xi)d\xi = \psi(y), \\ \int\limits_0^Y \Big[u_1(x) + u_2(\eta) + \int\limits_0^x\int\limits_0^\eta f(s,t)dt\,ds\Big] K_2(\eta)d\eta = \varphi(x), \end{cases}$$

или, что то же,

$$\begin{cases} u_2(y)\int\limits_0^X K_1(\xi)d\xi + \int\limits_0^X K_1(\xi)u_1(\xi)d\xi + \int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)dt\,ds\,d\xi = \psi(y), \\ u_1(x)\int\limits_0^Y K_2(\eta)d\eta + \int\limits_0^Y K_2(\eta)u_2(\eta)d\eta + \\ \quad + \int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta f(s,t)dt\,ds\,d\eta = \varphi(x). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} u_2(y) &= \frac{\psi(y)}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)u_1(\xi)d\xi - \frac{1}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)dt\,ds\,d\xi, \\ u_1(x) &= \frac{\varphi(x)}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)u_2(\eta)d\eta - \frac{1}{k_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta f(s,t)dt\,ds\,d\eta. \end{aligned} \tag{10}$$

Почленно складывая оба соотношения в (10), мы находим, что

$$\begin{aligned} u_1(x) + u_2(y) = \frac{\varphi(x)}{\kappa_2} + \frac{\psi(y)}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)dt\,ds\,d\xi - \\ - \frac{1}{k_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta f(s,t)dt\,ds\,d\eta - \\ - \frac{1}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)u_1(\xi)d\xi - \frac{1}{\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)u_2(\eta)d\eta. \end{aligned} \tag{11}$$

Чтобы исключить слагаемые

$$\int\limits_0^X u_1(\xi)K_1(\xi)d\xi \quad \text{и} \quad \int\limits_0^Y u_2(\eta)K_2(\eta)d\eta$$

из (11), умножим первое соотношение в (10) на $K_2(y)/\kappa_2$ и проинтегрируем результат по интервалу I_y. Это приведет к соотношению

$$\frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(y)u_2(y)dy=\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(y)\psi(y)\,dy-\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(y)\int\limits_0^X K_1(\xi)u_1(\xi)d\xi\,dy-$$

$$-\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(y)\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)\,dt\,ds\,d\xi\,dy,$$

из которого следует, что

$$\frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(y)u_2(y)\,dy+\frac{1}{\varkappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)u_1(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(y)\psi(y)\,dy-$$

$$-\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^X\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(y)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)\,dt\,ds\,dy\,d\xi. \tag{12}$$

Комбинируя соотношения (11) и (12), мы находим, что

$$u_1(x)+u_2(y)=\frac{\varphi(x)}{\varkappa_2}+\frac{\psi(y)}{\varkappa_1}-\frac{1}{\varkappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)\,dt\,ds\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta f(s,t)\,dt\,ds\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^X\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(\eta)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta f(s,t)\,dt\,ds\,d\eta\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)\,d\eta.$$

Если теперь подставить в (9) найденное выражение для $u_1(x)+u_2(y)$, то мы получим функцию

$$u(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t)\,dt\,ds-\frac{1}{\varkappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\left(\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)\,dt\,ds\right)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\left(\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta f(s,t)\,dt\,ds\right)\,d\eta+$$

$$
+\frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\int\limits_0^X\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(\eta)\left(\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta f(s,t)\,dt\,ds\right)d\eta\,d\xi-
$$

$$
-\frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)\,d\eta+\frac{\varphi(x)}{\kappa_2}+\frac{\psi(y)}{\kappa_1},
$$

представляющую собой единственное решение задачи (2). Непосредственно проверяется, что это решение принадлежит пространству $\mathcal{W}$ и что оператор $(f,\varphi,\psi)\in\mathcal{V}\to u\in\mathcal{W}$ непрерывен. Тем самым предложение 1.1 доказано полностью. ■

Замечание 1. Используя условия совместности (3), мы можем представить функцию

$$
u=\mathcal{P}_0^{-1}(f,\varphi,\psi)
$$

в форме, симметричной относительно переменных x и y, а именно

$$
u(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t)dt\,ds-\frac{1}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\Bigl(\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y f(s,t)dt\,ds\Bigr)d\xi-
$$

$$
-\frac{1}{\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\Bigl(\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta f(s,t)dt\,ds\Bigr)d\eta+
$$

$$
+\frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^\beta K_1(\xi)K_2(\eta)\Bigl(\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta f(s,t)dt\,ds\Bigr)\,d\eta\,d\xi-
$$

$$
-\frac{1}{2\kappa_1\kappa_2}\Bigl(\int\limits_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)d\eta+\int\limits_0^X K_1(\xi)\phi(\xi)d\xi\Bigr)+\frac{\varphi(x)}{\kappa_2}+\frac{\psi(y)}{\kappa_1}.
$$

1.3. Сведение задачи ($\mathcal{P}$) к интегральному уравнению

В настоящем пункте будет показано, как задача ($\mathcal{P}$) может быть сведена эквивалентным образом к некоторому интегральному уравнению, что позволяет в дальнейшем использовать методы функционального анализа.

Введем в рассмотрение следующий интегральный оператор:

$$
\mathcal{C}:v(x,y)\mapsto v(x,y)+a(x,y)\Bigl[\int\limits_0^y v(x,t)dt-\frac{1}{\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^\eta v(x,t)dt\,d\eta\Bigr]+
$$

$$+\,b(x,y)\Big[\int\limits_0^x v(s,y)ds-\frac{1}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi v(s,y)ds\,d\xi\Big]+$$
$$+\,c(x,y)\Big[\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds-\frac{1}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\!\!\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds\,d\xi-$$
$$-\frac{1}{\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta+$$
$$+\frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\int\limits_0^X\!\!\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(\eta)\int\limits_0^\xi\!\!\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta\,d\xi\Big]$$

в пространстве $C(D)$ и сопоставим ему интегральное уравнение

$$\mathcal{C}v(x,y)=f(x,y)-\frac{a(x,y)}{\kappa_2}\varphi'(x)-\frac{b(x,y)}{\kappa_1}\,\psi'(y)+$$
$$+\,c(x,y)\bigg(\frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\,\psi(\eta)d\eta-\frac{1}{\kappa_2}\,\varphi(x)-\frac{1}{\kappa_1}\,\psi(y)\bigg).\quad(13)$$

Теорема 1.2. *Если* $\kappa_1\,\kappa_2\neq 0$, *то задача* $(\mathcal{P})$ *имеет решение* $u\in\mathcal{W}$ *в том и только в том случае, если уравнение* (13) *разрешимо в пространстве* $C(D)$. *Это решение представляется в виде*

$$u(x,y)=\mathcal{P}_0^{-1}\Big(v(x,y),\varphi(x),\psi(y)\Big),\quad(14)$$

где функция $v(x,y)$ *является решением уравнения* (13).

Доказательство. Непосредственно проверяется, что если функция $u(x,y)$ определяется соотношением (14) в котором $v(x,y)\in C(D)$, то $u\in\mathcal{W}$. Для любой такой функции $u(x,y)$ мы имеем

$$\partial_x\partial_y\Big[\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds-\frac{1}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\!\!\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds\,d\xi-$$
$$-\frac{1}{\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta-\frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^X\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(y)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta\,d\xi\;+\frac{\varphi(x)}{\varkappa_2}+\frac{\psi(y)}{\varkappa_1}\Bigg]+$$

$$+a(x,y)\partial_x\Bigg[\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds-\frac{1}{\varkappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta-\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^X\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(y)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds\,dy\,d\xi+\frac{\varphi(x)}{\varkappa_2}+\frac{\psi(y)}{\varkappa_1}\Bigg]+$$

$$+b(x,y)\partial y\Bigg[\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds-\frac{1}{\varkappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta-\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^X\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(\eta)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta\,d\xi+\frac{\varphi(x)}{\varkappa_2}+\frac{\psi(y)}{\varkappa_1}\Bigg]+$$

$$+c(x,y)\Bigg[\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds-\frac{1}{\varkappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta-\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\int\limits_0^X\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(y)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds\,dy\,d\xi+\frac{\varphi(x)}{\varkappa_2}+\frac{\psi(y)}{\varkappa_1}\Bigg]=f(x,y).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что это соотношение совпадает с (13), чем и завершается доказательство теоремы в части необходимости.

Для доказательства теоремы в части достаточности проверим, что если функция $v(x,y)$ является решением уравнения (13), то функция $u(x,y)$, представляющая собой решение задачи $\mathcal{P}_0 u = (v, \varphi, \psi)$, удовлетворяет уравнению $\mathcal{P}u = (f, \varphi, \psi)$. Действительно, из определения оператора $\mathcal{P}_0$ (см. (2)) следует, что

$$v = \partial_x \partial_y u,$$

а также

$$\psi(y) = \int_0^X K_1(x) u(x,y)\,dx, \tag{15}$$

$$\varphi(x) = \int_0^Y K_2(y) u(x,y)\,dy. \tag{16}$$

Подставляя в (13) вместо $v(x,y)$ функции $\partial_x\partial_y u$ и используя равенства (15) и (16), мы находим, что

$$\begin{aligned}
&\partial_x\partial_y u + a(x,y)\left\{\partial_x u(x,y) - \partial_x u(x,0) - \frac{1}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(\eta)\left[\partial_x u(x,\eta) - \partial_x u(x,0)\right] d\eta\right\} + \\
&+ b(x,y)\left\{\partial_y u(x,y) - \partial_y u(0,y) - \frac{1}{\kappa_1}\int_0^X K_1(\xi)\left[\partial_y u(\xi,y) - \partial_y u(0,y)\right] d\xi\right\} + \\
&+ c(x,y)\Big\{u(x,y) - u(0,y) - u(x,0) + u(0,0) - \\
&- \frac{1}{\kappa_1}\int_0^X K_1(\xi)\left[u(\xi,y) - u(0,y) - u(\xi,0) + u(0,0)\right] d\xi - \\
&- \frac{1}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(\eta)\left[u(x,\eta) - u(0,\eta) - u(x,0) + u(0,0)\right] d\eta + \\
&+ \frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\int_0^X\!\!\int_0^Y K_1(\xi)K_2(\eta)\left[u(\xi,\eta) - u(0,\eta) - u(\xi,0) + u(0,0)\right] d\eta\, d\xi\Big\} = \\
&= \partial_x\partial_y u + a(x,y)\left[\partial_x u(x,y) - \frac{1}{\kappa_2}\varphi'(x)\right] + b(x,y)\left[\partial_y u(x,y) - \frac{1}{\kappa_1}\psi'(y)\right] + \\
&+ c(x,y)\left[u(x,y) - \frac{1}{\kappa_1}\psi(y) - \frac{1}{\kappa_2}\varphi(x) + \frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\int_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)\,d\eta\right].
\end{aligned}$$

Отсюда и из (13) следует, что

$$\partial_x \partial_y u + a u_x + b u_y + c u = f,$$

а это в комбинации с (15) и (16) означает, что функция $u(x, y)$ решает задачу $(\mathcal{P})$. Теорема 1.2 доказана полностью. ■

1.4. Однозначная разрешимость задачи $(\mathcal{P})$

В настоящем пункте мы докажем, что при выполнении определенных условий на функции K_1 и K_2 задача $(\mathcal{P})$ имеет единственное решение при любой правой части (f, φ, ψ), удовлетворяющей необходимому условию (3). Более того, будет показано, что если упомянутые условия на K_1 и K_2 не выполняются, то задача $(\mathcal{P})$ может быть разрешима неоднозначно или даже не разрешима.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{\kappa}_1 := \frac{1}{X|\kappa_1|} \int_0^X x\,|K_1(x)|\,dx,$$

$$\overline{\kappa}_2 := \frac{1}{Y|\kappa_2|} \int_0^Y y\,|K_2(y)|\,dy,$$

$$\overline{\kappa} := \max\left(\overline{\kappa}_1,\ \overline{\kappa}_2,\ \overline{\kappa}_1\,\overline{\kappa}_2\right),$$

$$\gamma := \max\left(X\,|b|,\ Y\,|a|,\ XY\,|c|\right),$$

Теорема 1.3. *Если $\kappa_1\,\kappa_2 \neq 0$ и функции $K_1(x)$, $K_2(y)$ удовлетворяют условию*

$$\overline{\kappa} < \frac{e^{-9\gamma}}{5\gamma}, \tag{17}$$

то при любых функциях $\Big(f(x, y),\ \varphi(x),\ \psi(y)\Big) \in \mathcal{V}$, удовлетворяющих необходимому условию (3), *задача* $(\mathcal{P})$ *однозначно разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим задачу $(\mathcal{P})$ при заданных значениях $f(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ и введем функцию

$$\widetilde{f}(x, y) := f(x, y) - \frac{a(x, y)}{\kappa_2}\varphi'(x) - \frac{b(x, y)}{\kappa_1}\,\psi'(y) + \\ + \frac{c(x, y)}{\kappa_1 \kappa_2} \int_0^Y K_2(y)\psi(y)dy - \frac{c(x, y)}{\kappa_2}\,\varphi(x) - \frac{c(x, y)}{\kappa_1}\,\psi(y),$$

фигурирующую в интегральном уравнении (13).

Введем в рассмотрение также два новых оператора

$$(Av)\,(x,y) := a(x,y)\int\limits_0^y v(x,t)dt +$$

$$+\, b(x,y)\int\limits_0^x v(s,y)ds + c(x,y)\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds \quad \text{в} \quad D \tag{18}$$

и

$$(Bv)\,(x,y) := -\frac{a(x,y)}{\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^\eta v(x,t)dt\,d\eta -$$

$$-\frac{b(x,y)}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi v(s,y)ds\,d\xi - \frac{c(x,y)}{\kappa_1}\int\limits_0^X K_1(\xi)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^y v(s,t)dt\,ds\,d\xi -$$

$$-\frac{c(x,y)}{\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta +$$

$$+\frac{c(x,y)}{\kappa_1\kappa_2}\int\limits_0^X\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(\eta)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\,ds\,d\eta\,d\xi \quad \text{в } D.$$

Интегральное уравнение (13), сопоставляемое задаче $(\mathcal{P})$, может быть записано теперь в операторной форме

$$(I+A)v + Bv = \widetilde{f}. \tag{19}$$

Предположим, что мы доказали обратимость оператора $I+A$ в пространстве $C(D)$ и получили оценку

$$\left\|(I+A)^{-1}B\right\| < 1. \tag{20}$$

Тогда однозначная разрешимость уравнения (19) при произвольных правых частях f является простым следствием известной теоремы функционального анализа. На основании теоремы 1.2 из разрешимости уравнения (19) следует существование решения $u(x,y)$ задачи $(\mathcal{P})$ при любых функциях $f(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ из соответствующих пространств. Проверим единственность такого решения. С этой целью вернемся к задаче $(\mathcal{P})$, в которой $f(x,y)=0$, $\varphi(x)=0$, $\psi(y)=0$. Пусть $u(x,y)$ является одним из ее решений. Тогда функция

$$v(x,y) = \partial_x\partial_y u(x,y),$$

как доказано выше, оказывается решением задачи

$$v(x,y) + (I+A)^{-1}Bv(x,y) = 0$$

и, на основании (20),

$$v(x,y) = 0.$$

Это означает, что для некоторых функций

$$\alpha(x) \in C^1(I_x) \quad \text{и} \quad \beta(y) \in C^1(I_y)$$

мы имеем

$$u(x,y) = \alpha(x) + \beta(y).$$

Но тогда, как следует из условий задачи $(\mathcal{P})$,

$$\int_0^X \alpha(x)K_1(x)\,dx + \Big(\int_0^X K_1(x)\,dx\Big)\beta(y) = 0,$$

$$\int_0^Y \beta(y)K_2(y)\,dy + \Big(\int_0^Y K_2(y)\,dy\Big)\alpha(x) = 0.$$

Это означает, что обе функции $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ являются константами α и β, соответственно, и удовлетворяют условиям

$$\alpha\kappa_1 + \kappa_1\beta = 0,$$

$$\beta\kappa_2 + \kappa_2\alpha = 0.$$

Поскольку $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$, отсюда следует, что

$$\alpha + \beta = 0,$$

а значит, и

$$u(x,y) = 0.$$

Тем самым требуемая единственность решения задачи $(\mathcal{P})$ установлена, что и завершает доказательство теоремы 1.3. Итак, остается доказать обратимость оператора $I + A$ и получить оценку (20). Первый из этих фактов является очевидным следствием такого утверждения.

Лемма 1.4. *Для любого оператора A вида* (18) *справедливо соотношение*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| < e^{9\gamma},$$

где $\|\cdot\|$ — стандартная норма в пространстве линейных операторов, действующих в пространстве $C(D)$.

Доказательство. Введем операторы

$$(A_1v)(x,y) := a(x,y)\int\limits_0^y v(x,t)dt \quad \text{в} \quad D,$$

$$(A_2v)(x,y) := b(x,y)\int\limits_0^x v(s,y)ds \quad \text{в} \quad D,$$

$$(A_3v)(x,y) := c(x,y)\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(s,t)\,dt\,ds \quad \text{в} \quad D,$$

а также операторы

$$\widetilde{A}_1v(x,y) = |a|\int\limits_0^y |v(x,t)|\,dt \quad \text{в} \quad D,$$

$$\widetilde{A}_2v(x,y) = |b|\int\limits_0^x |v(s,y)|\,ds \quad \text{в} \quad D,$$

$$\widetilde{A}_3v(x,y) = |c|\int\limits_0^x\int\limits_0^y |v(s,t)|\,dt\,ds \quad \text{в} \quad D.$$

Покажем, что неравенство

$$|(A_1^nv)(x,y)| \leqslant (\widetilde{A}_1^nv)(x,y) \tag{21}$$

выполняется в каждой точке $(x,y)\in D$. Действительно, при $n=1$

$$|(A_1v)(x,y)| = |a(x,y)|\left|\int\limits_0^y v(x,t)dt\right| \leqslant (\widetilde{A}_1v)(x,y) \quad \text{в } D.$$

Допустим, что при некотором $k\geqslant 1$

$$|(A_1^kv)(x,y)| \leqslant (\widetilde{A}_1^kv)(x,y) \;\text{ в }\; D, \tag{22}$$

и покажем, что

$$|(A_1^{k+1}v)(x,y)| \leqslant (\widetilde{A}_1^{k+1}v)(x,y) \;\text{ в }\; D.$$

В самом деле,

$$|(A_1^{k+1}v)(x,y)| = |(A_1(A_1^kv))(x,y)| =$$

$$= |a(x,y)|\left|\int\limits_0^y (A_1^kv)(x,t)dt\right| \leqslant |a|\int\limits_0^y |(A_1^kv)(x,t)|\,dt.$$

Из неравенства (22) следует, что

$$\|a\| \int_0^y |(A_1^k v)(x,t)|\, dt \leqslant \|a\| \int_0^y (\widetilde{A}_1^k v)(x,t) dt = (\widetilde{A}_1^{k+1} v)(x,y),$$

а значит, требуемое соотношение (21) имеет место при всех $n \in \mathbb{N}$.

Для упрощения записи введем в рассмотрение единичную сферу

$$S = \{v(x,y) \mid \|v\| = 1\}.$$

Докажем по индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной функции $v(x,y) \in S$ следующая оценка справедлива:

$$(\widetilde{A}_1^n v)(x,y) \leqslant \|a\|^n \frac{y^n}{n!} \quad \text{в } D. \tag{23}$$

В самом деле, при $n = 1$ мы находим, что

$$(\widetilde{A}_1 v)(x,y) = \|a\| \int_0^y |v(x,t)|\, dt \leqslant \|a\| \int_0^y dt = \|a\| y.$$

Допустим, что для некоторого значения $k \geqslant 1$

$$(\widetilde{A}_1^k v)(x,y) \leqslant \|a\|^k \frac{y^k}{k!} \quad \text{в } D.$$

Согласно индуктивному предположению,

$$(\widetilde{A}_1^{k+1} v)(x,y) = (\widetilde{A}_1(\widetilde{A}_1^k v))(x,y) = \|a\| \int_0^y |(\widetilde{A}_1^k v)(x,t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|a\| \int_0^y \|a\|^k \frac{t^k}{k!}\, dt = \|a\|^{k+1} \frac{y^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Так что неравенство (23) выполняется при всех $n \in \mathbb{N}$.

Неравенство (21) в сочетании с (23) позволяет заключить, что для любой функции $v \in S$ неравенство

$$|(A_1^n v)(x,y)| \leqslant (\widetilde{A}_1^n v)(x,y) \leqslant \|a\|^n \frac{y^n}{n!} \quad \text{в } D \tag{24}$$

выполняется во всех точках $(x,y) \in D$.

Аналогичная оценка для оператора A_2

$$|(A_2^n v)(x,y)| \leqslant (\widetilde{A}_2^n v)(x,y) \leqslant \|b\|^n \frac{x^n}{n!} \quad \text{in } D \tag{25}$$

имеет место для всех функций $v \in S$ в области D.

Повторяя последовательно все проведенные только что рассуждения применительно к оператору A_3, мы можем заключить, что для всех функций $v(x, y) \in S$ выполняется следующая оценка в каждой точке $(x, y) \in D$:

$$|(A_3^n v)(x, y)| \leqslant (\widetilde{A}_3^n v)(x, y) \leqslant |c|^n \frac{(xy)^n}{n^2} \quad \text{в } D. \tag{26}$$

Важно отметить, что операторы $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_3$, определенные выше, попарно коммутируют. В самом деле, рассмотрим к примеру пару операторов $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$. Тогда для любой функции $v \in C(D)$ мы имеем

$$(\widetilde{A}_1(\widetilde{A}_2 v))(x, y) = |a| \int\limits_0^y \left| |b| \int\limits_0^x |v(s, t)| ds \right| dt = |a||b| \int\limits_0^y \int\limits_0^x |v(s, t)| ds\, dt \quad \text{в } D,$$

$$(\widetilde{A}_2(\widetilde{A}_1 v))(x, y) = |b| \int\limits_0^x \left| |a| \int\limits_0^y |v(s, t)| dt \right| ds = |b||a| \int\limits_0^x \int\limits_0^y |v(s, t)| dt\, ds \quad \text{в } D.$$

Отсюда на основании теоремы Фубини следует требуемая коммутативность операторов $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$. Для операторов $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_3$ те же рассуждения с привлечением на последнем шаге теоремы Фубини приводят к равенству $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_3 = \widetilde{A}_3\widetilde{A}_1$. Наш следующий шаг состоит в индуктивной проверке справедливости неравенства

$$|((A_1 + A_2 + A_3)^n v)(x, y)| \leqslant ((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)^n v)(x, y) \quad \text{в } D. \tag{27}$$

При $n = 1$, используя стандартные оценки интегралов, мы находим, что

$$\begin{aligned} |((A_1 + A_2 + A_3)v)(x, y)| &= |(A_1 v)(x, y) + (A_2 v)(x, y) + (A_3 v)(x, y)| \leqslant \\ &\leqslant |(A_1 v)(x, y)| + |(A_2 v)(x, y)| + |(A_3 v)(x, y)| \leqslant \\ &\leqslant (\widetilde{A}_1 v)(x, y) + (\widetilde{A}_2 v)(x, y) + (\widetilde{A}_3 v)(x, y) = \\ &= ((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)v)(x, y). \end{aligned} \tag{28}$$

Покажем, что отсюда и из неравенства (27) для произвольного значения $k \in \mathbb{N}$ следует выполнение того же неравенства для $k + 1$. Введем обозначение

$$w(x, y) := \Big((A_1 + A_2 + A_3)^k v\Big)(x, y).$$

Тогда из (28) следует, что

$$\begin{aligned} |((A_1 + A_2 + A_3)^{k+1} v)(x, y)| &= |((A_1 + A_2 + A_3)w)(x, y)| \leqslant \\ &\leqslant ((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)w)(x, y). \end{aligned} \tag{29}$$

Заметим, что по определению операторов A_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, если выполняется неравенство

$$0 \leqslant u_1(x,y) \leqslant u_2(x,y) \quad \text{в } D$$

для функций u_1, u_2 из пространства $C(D)$, то

$$(\widetilde{A}_j u_1)(x,y) \leqslant (\widetilde{A}_j u_2)(x,y) \quad \text{в } D. \tag{30}$$

Эти наблюдения вместе с предположением индукции приводят к неравенству

$$\Big((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)w\Big)\,(x,y) = \Big((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)(A_1 + A_2 + A_3)^k v\Big)\,(x,y) =$$
$$= \Big((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)\big|(A_1 + A_2 + A_3)^k v\big|\Big)\,(x,y) \leqslant$$
$$\leqslant \Big((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)(\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)^k v\Big)\,(x,y) = \Big((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)^{k+1} v\Big)\,(x,y).$$

В свою очередь, последнее неравенство в сочетании с (29) имеет своим следствием требуемое соотношение (27) при любом $n \in \mathbb{N}$.

На основании (27) и коммутируемости операторов $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_3$ следующее неравенство оказывается справедливым для всех функций $v \in C(D)$:

$$|((A_1 + A_2 + A_3)^n v)(x,y)| \leqslant ((\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3)^n v)(x,y) =$$
$$= \Big(\Big(\sum_{\substack{0 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,\widetilde{A}_1^i\,\widetilde{A}_2^j\,\widetilde{A}_3^k\Big)\,v\Big)(x,y). \tag{31}$$

Займемся теперь оценкой сверху правой части последнего неравенства для функций $v \in S$. Очевидно, что соотношение (30) остается верным для любых целых степеней $\widetilde{A}_j^m$ операторов $\widetilde{A}_j$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, и для любых суперпозиций этих степеней. Это замечание вместе с оценками (24), (25), (26) и (28) приводят к следующей оценке:

$$\Big(\Big(\sum_{\substack{0 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\widetilde{A}_1^i\,\widetilde{A}_2^j\,\widetilde{A}_3^k\Big)\,v\Big)(x,y) \leqslant \Big(\sum_{\substack{0 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,\widetilde{A}_1^i\,\widetilde{A}_2^j\Big)\frac{(\|c\|XY)^k}{(k!)^2} =$$
$$= \Big(\sum_{\substack{0 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,\frac{(\|c\|XY)^k}{(k!)^2}\widetilde{A}_1^i\,\widetilde{A}_2^j\Big)(1) \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sum_{\substack{0 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,\frac{(\|c\|XY)^k}{(k!)^2}\widetilde{A}_1^i\Big)\Big(\frac{(\|b\|X)^j}{j!}\Big) =$$
$$= \Big(\sum_{\substack{0 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,\frac{(\|c\|XY)^k}{(k!)^2}\,\frac{(\|b\|X)^j}{j!}\widetilde{A}_1^i\Big)(1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,\frac{(|c|XY)^k}{(k!)^2}\,\frac{(|b|X)^j}{j!}\,\frac{(|a|Y)^i}{i!} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^n \sum_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{(i!\,j!)^2\,(k!)^3} \leqslant \frac{\gamma^n}{n!} \sum_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} \frac{(n!)^2}{(i!\,j!\,k!)^2} \leqslant \frac{\gamma^n}{n!}\left[\sum_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\right]^2. \tag{32}$$

Как известно,

$$\sum \frac{n!}{i!\,j!\,k!} = 3^n.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{\gamma^n}{n!}\left[\sum_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\right]^2 = \frac{\gamma^n}{n!}\,3^{(2n)} = \frac{(9\gamma)^n}{n!}.$$

Вместе с оценками (31) и (32), последнее соотношение приводит к априорной оценке

$$|((A_1+A_2+A_3)^n v)(x,y)| \leqslant \frac{(9\gamma)^n}{n!} \quad \text{в } D,$$

а значит, и к оценке

$$\|(A_1+A_2+A_3)^n\| = \max_{\substack{v\in S\\ (x,y)\in D}} |((A_1+A_2+A_3)^n v)(x,y)| \leqslant \frac{(9\gamma)^n}{n!}\,.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство, а заодно и оценка

$$\|(I+A)^{-1}\| \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leqslant e^{9\gamma}.$$

Перейдем теперь к оценке оператора B. Воспользуемся стандартными оценками интегральных операторов в пространствах непрерывных функций применительно к оператору B. Это дает

$$\|B\| = \max_{\substack{v\in S\\ (x,y)\in D}} \left| -\frac{a(x,y)}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(\eta)\int_0^\eta v(x,t)dt\,d\eta \right. -$$

$$- \frac{b(x,y)}{\kappa_1}\int_0^X K_1(\xi)\int_0^\xi v(s,y)ds\,d\xi - \frac{c(x,y)}{\kappa_1}\int_0^X K_1(\xi)\int_0^\xi\!\!\int_0^y v(s,t)dt\,ds\,d\xi -$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{c(x,y)}{\kappa_1} \int\limits_0^Y K_2(\eta) \int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\, ds\, d\eta \; + \\
&+ \frac{c(x,y)}{\kappa_1 \kappa_2} \int\limits_0^X\!\!\int\limits_0^Y K_1(\xi)K_2(\eta) \int\limits_0^\xi\!\!\int\limits_0^\eta v(s,t)dt\, ds\, d\eta\, d\xi \Bigg| \leqslant \\
&\leqslant \frac{|a|}{|\kappa_2|} \int\limits_0^Y \eta|K_2(\eta)|d\eta + \frac{|b|}{|\kappa_1|} \int\limits_0^X \xi|K_1(\xi)|d\xi + \\
&+ \frac{|c|}{|\kappa_1|}\, y \int\limits_0^X \xi|K_1(\xi)|d\xi + \frac{|c|}{|\kappa_2|}\, x \int\limits_0^Y \eta|K_2(\eta)|d\eta + \\
&+ \frac{|c|}{|\kappa_1\ \kappa_2|} \int\limits_0^X \xi|K_1(\xi)|d\xi \int\limits_0^Y \eta|K_1(\eta)|d\eta = \\
&= |a|Y\, \overline{\kappa}_2 + |b|X\, \overline{\kappa}_1 + |c|y\, X\, \overline{k}_1 + |c|x\, Y\, \overline{k}_2 + |c|X\, Y\, \overline{k}_1\, \overline{k}_2 \leqslant \\
&\leqslant (|a|Y + |b|X + 3|c|X\, Y)\ \overline{\kappa} \leqslant 5\gamma\, \overline{\kappa}.
\end{aligned}
$$

Комбинируя заключительные оценки операторов $(I + A)^{-1}$ и B с условием (17), мы приходим к нужному результату (20):

$$\|(I + A)^{-1}B\| \leqslant \|(I + A)^{-1}\|\, \|B\| \leqslant 5\gamma\overline{\kappa}e^{9\gamma} < 1. \qquad \blacksquare$$

Замечание 2. Важно отметить, что *если функции K_1 и K_2 сохраняют знаки на своих интервалах определения, то неравенство* (17) *всегда выполняется в достаточно малой области. Другими словами, задача $\mathcal{P}$ локально разрешима независимо от параметров, определяющих оператор задачи.*

Доказательство. Если функции $K_1(x)$ и $K_2(y)$ не меняют знаки на I_x и I_y, соответственно, то

$$\overline{\kappa}_1 = \frac{1}{X|\kappa_1|} \int\limits_0^X \xi\, |K_1(\xi)|\, d\xi \leqslant \frac{1}{X|\kappa_1|} X \int\limits_0^X |K_1(\xi)|\, d\xi = 1,$$

$$\overline{\kappa}_2 = \frac{1}{Y|\kappa_2|} \int\limits_0^Y \eta\, |K_2(\eta)|\, d\eta \leqslant \frac{1}{Y|\kappa_2|} Y \int\limits_0^Y |K_2(\eta)|\, d\eta = 1,$$

а значит, и $\overline{\kappa} \leqslant 1$. С другой стороны, функция $e^{-9\gamma}/5\gamma$ стремится к бесконечности при $\gamma \to 0$. Поэтому неравенство (17) справедливо при достаточно малом значении γ. Из определения константы γ следует, что ее стремление к нулю равносильно неограниченному убыванию диаметра области D. Это и означает локальную разрешимость задачи $(\mathcal{P})$. ■

Замечание 3. Полученный результат — однозначная разрешимость задачи $(\mathcal{P})$ в достаточно малой области — является точным, как показывает следующий пример:

$$\begin{cases} u_{xy} - u = 0, & \text{в } \operatorname{int} D, \\ \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, e^{-x}\, u(x,y)dx = 0, & y \in I_y, \\ \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin y\, e^{-y}\, u(x,y)dy = 0, & x \in I_x. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции

$$u(x,y) = ce^{x+y}$$

являются решениями этой задачи при любых вещественных значениях c, так что решение в этом случае не единственно.

1.5. Фредгольмовость задачи $(\mathcal{P})$

Как следует из замечания 3, задача $(\mathcal{P})$ не при любых наборах функций $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $K_1(x)$, $K_2(y)$ и не во всякой области D является однозначно разрешимой. В настоящем пункте мы исследуем условия, при которых оператор, соответствующий этой проблеме, является фредгольмовым. В следующей теореме формулируется достаточное условие фредгольмовости задачи $(\mathcal{P})$, которое, как показывает последующее замечание 5, является точным: в случае нарушения этого условия рассматриваемая задача может оказаться нефредгольмовой.

Теорема 1.5. *Допустим, что в задаче* $(\mathcal{P})$ $b(x,y) = b(x)$. *Пусть*

$$\widetilde{K}_1(x) := K_1(x) \exp\left\{-\int\limits_0^x b(s)\,ds\right\}$$

и

$$\widetilde{\kappa}_1 = \int\limits_0^X \widetilde{K}_1(x)\,dx.$$

При выполнении условий

$$\widetilde{\kappa}_1\kappa_2 \neq 0 \quad \textit{и} \quad \int\limits_0^Y K_2(y) \exp\left\{-\int\limits_0^y a(x,t)\,dt\right\} dy \neq 0, \quad \textit{при всех} \quad x \in I_x, \tag{33}$$

задача $(\mathcal{P})$ *является фредгольмовой.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$\widetilde{c}(x,y) := c(x,y) - a(x,y)\,b(x),$$

$$\widetilde{f}(x,y) := f(x,y)\ \exp\left\{\int\limits_0^x b(s)ds\right\}, \quad \widetilde{\varphi}(x) := \varphi(x)\ \exp\left\{\int\limits_0^x b(s)ds\right\}.$$

Заменяя $u(x,y)$ в $(\mathcal{P})$ новой неизвестной функцией

$$w(x,y) = u(x,y)\exp\left\{\int\limits_0^x b(s)ds\right\},$$

мы приходим к *эквивалентной* задаче

$$\begin{cases} w_{xy} + aw_x + \widetilde{c}w = \widetilde{f} \quad \text{в } \operatorname{int} D, \\ \int\limits_0^X \widetilde{K}_1(x)w(x,y)dx = \psi(y), \quad y \in I_y, \\ \int\limits_0^Y K_2(y)w(x,y)dy = \widetilde{\varphi}(x), \quad x \in I_x. \end{cases} \tag{34}$$

Отметим, что условие совместности (3) при этом переходе принимает форму

$$\int\limits_0^X \widetilde{K}_1(x)\widetilde{\varphi}(x)\,dx = \int\limits_0^Y K_2(y)\psi(y)\,dy.$$

При доказательстве фредгольмовости задачи (34) мы следуем такому плану. Вначале устанавливается фредгольмовость интегрального оператора $\mathcal{C}$, соответствующего оператору, порождаемому левой частью соотношений (34), который для упрощения будет также обозначаться символом $\mathcal{P}$. Затем мы доказываем, что величины $\dim\ker\mathcal{P}$ и $\dim\operatorname{coker}\mathcal{P}$ ограничены сверху числом $\dim\ker\mathcal{C} = \dim\operatorname{coker}\mathcal{C}$, и наконец, устанавливается замкнутость области значений оператора $\mathcal{P}$. ■

Интегральное уравнение (13), сопоставляемое задаче $(\mathcal{P})$, в данной ситуации принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}w := w(x,y) + a(x,y)\left[\int_0^y w(x,t)dt - \frac{1}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(\eta)\int_0^\eta w(x,t)dtd\eta\right] + \\
+ \widetilde{c}(x,y)\Big[\int_0^x\int_0^y w(s,t)dt\,ds - \\
- \frac{1}{\widetilde{\kappa}_1}\int_0^X \widetilde{K}_1(\xi)\int_0^\xi\int_0^y w(s,t)dt\,ds\,d\xi - \\
- \frac{1}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(\eta)\int_0^x\int_0^\eta w(s,t)dt\,ds\,d\eta + \\
+ \frac{1}{\widetilde{\kappa}_1\kappa_2}\int_0^X\int_0^Y \widetilde{K}_1(\xi)K_2(\eta)\int_0^\xi\int_0^\eta w(s,t)dt\,ds\,d\eta\,d\xi\Big] = \\
= \widetilde{f}(x,y) - \frac{a(x,y)}{\kappa_2}\widetilde{\varphi}'(x) + \\
+ \widetilde{c}(x,y)\left(\frac{1}{\widetilde{\kappa}_1\kappa_2}\int_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)\,d\eta - \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{\kappa_2} - \frac{\psi(y)}{\widetilde{\kappa}_1}\right). \qquad (35)
\end{aligned}$$

Введем следующие интегральные операторы в пространстве $C(D)$:

$$(A_1 w)(x,y) := a(x,y)\int_0^y w(x,t)\,dt \quad \text{в } D,$$

$$(A_2 w)(x,y) := -\frac{a(x,y)}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(\eta)\int_0^\eta w(x,t)dt\,d\eta \quad \text{в } D$$

и

$$(Bw)(x,y) := \widetilde{c}(x,y)\left(\int_0^x\int_0^y w(s,t)\,dt\,ds - \right.$$

$$- \frac{1}{\widetilde{\kappa}_1} \int\limits_0^X \widetilde{K}_1(\xi) \int\limits_0^\xi\int\limits_0^y w(s,t)\,dt\,ds\,d\xi - \frac{1}{\kappa_2} \int\limits_0^Y K_2(\eta) \int\limits_0^x\int\limits_0^\eta w(s,t)\,dt\,ds\,d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\widetilde{\kappa}_1\,\kappa_2} \int\limits_0^X\int\limits_0^Y \widetilde{K}_1(\xi)\,K_2(\eta) \int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta w(s,t)\,dt\,ds\,d\eta\,d\xi \Bigg) \quad \text{в } D. \tag{36}$$

Пусть также

$$\widetilde{f}_1(x,y) := \widetilde{f}(x,y) - \frac{a(x,y)}{\kappa_2}\widetilde{\varphi}'(x) +$$
$$+ \widetilde{c}(x,y)\left(\frac{1}{\widetilde{\kappa}_1\kappa_2}\int\limits_0^Y K_2(\eta)\psi(\eta)\,d\eta - \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{\kappa_2} - \frac{\psi(y)}{\widetilde{\kappa}_1}\right).$$

Тогда интегральное уравнение (35) в операторной форме выглядит следующим образом:

$$\mathcal{C}w := (I + A_1 + A_2)w + Bw = \widetilde{f}_1.$$

Наша ближайшая цель — доказать фредгольмовость оператора $\mathcal{C}$. На основании легко устанавливаемого обобщения теоремы Рисса—Шаудера для этого достаточно установить обратимость оператора $I + A_1 + A_2$ и компактность B.

Лемма 1.6. *Если $p = p(x,y)$ и $q = q(x)$ — произвольные непрерывные функции в D и I_x, соответственно, то для любого натурального $n \geqslant 1$*

$$\big(A_1^n(pq)\big)(x,y) = q(x)\big(A_1^n p\big)(x,y) \quad \textit{в} \;\; D.$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно:

$$(A_1(p\,q))\,(x,y) = a(x,y)\int\limits_0^y p(x,t)\,q(x)dt =$$
$$= q(x)\,a(x,y)\int\limits_0^y p(x,t)dt = q(x)\;\,(A_1 p)\,(x,y).$$

Если оно справедливо при некотором $k \geqslant 1$, т. е.

$$\big(A_1^k(pq)\big)(x,y) = q(x)\big(A_1^k p\big)(x,y) \quad \text{в } \;D,$$

то

$$\big(A_1^{k+1}(pq)\big)(x,y) = a(x,y)\int\limits_0^y \big(A_1^k(pq)\big)(x,t)\,dt =$$

$$= a(x,y)q(x)\int\limits_0^y \big(A_1^k(p)\big)(x,t)\,dt = q(x)\big(A_1^{k+1}(p)\big)(x,y),$$

и на основании индуктивного заключения требуемое соотношение доказано. ■

Лемма 1.7. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\big(A_1^n a\big)(x,y) = a(x,y)\exp\left\{-\int\limits_0^y a(x,t)\,dt\right\} \quad \text{в } D.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\omega(x,y) := \int\limits_0^y a(x,t)dt$$

и докажем, что при всех целых значениях $n \geqslant 0$

$$\big(A_1^n a\big)(x,y) = a(x,y)\frac{\omega^n(x,y)}{n!}.$$

При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение тривиально. Допустим, что оно верно при $n = k \geqslant 1$, и докажем его справедливость при $n = k+1$:

$$\big(A_1^{k+1}a\big)(x,y) = \frac{\big(A_1(a\omega^k)\big)(x,y)}{k!} = \frac{a(x,y)}{k!}\int\limits_0^y a(x,t)\omega^k(x,t)\,dt =$$

$$= \frac{a(x,y)}{k!}\int\limits_0^y \big[\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t)\big]\omega^k(x,t)dt = \frac{a(x,y)}{(k+1)!}\int\limits_0^y \frac{\partial}{\partial t}\big[\omega^{k+1}(x,t)\big]\,dt =$$

$$= \frac{a(x,y)}{(k+1)!}\big(\omega^{k+1}(x,y) - \omega^{k+1}(x,0)\big) = \frac{a(x,y)\omega^{k+1}(x,y)}{(k+1)!}.$$

Тем самым доказано нужное соотношение, из которого немедленно следует, что

$$\big|\big(A_1^n a\big)(x,y)\big| = \frac{1}{n!}\left|a(x,y)\Big(\int\limits_0^y a(x,t)dt\Big)^n\right| \leqslant \frac{\|a\|(Y\|a\|)^n}{n!}.$$

Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|(Y|a|)^n}{n!} = |a| \cdot \exp\{Y \mid a \mid\},$$

мы заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(A_1^n u)(x,y)$ равномерно сходится и его сумма равна

$$a(x,y)\exp\left\{-\int_0^y a(x,t)\,dt\right\}. \quad \blacksquare$$

Лемма 1.8. *При выполнении условия*

$$\int_0^Y K_2(y)\exp\left\{-\int_0^y a(x,t)\,dt\right\}dy \neq 0 \quad \text{для всех } x \in I_x \tag{37}$$

оператор $I + A_1 + A_2$ обратим в пространстве $C(D)$.

Доказательство. Мы докажем, что при любой функции $f \in C(D)$ уравнение

$$(I + A_1 + A_2)w = f \tag{38}$$

имеет единственное решение $w \in C(D)$.

Отметим вначале, что, как следует из (24), оператор A_1 обладает тем свойством, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_1^n\| \leqslant \exp\{\mid a \mid Y\}.$$

В самом деле, достаточно вспомнить, что согласно (24)

$$\|A_1^n\| = \max_{\substack{(x,y)\in D\\ v\in S}} |A_1 v(x,y)| \leqslant \frac{(|a|Y)^n}{n!}.$$

Поэтому оператор $I + A_1$ обратим и

$$(I + A_1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_1^n. \tag{39}$$

Введем обозначение

$$(Kw)(x) = \int_0^Y K_2(y)\int_0^y w(x,t)\,dtdy. \tag{40}$$

Тогда уравнение (38) может быть переписано в эквивалентной форме как

$$\left\{\left[I + (I + A_1)^{-1}\left(-\frac{a}{\kappa_2}K\right)\right]w\right\}(x,y) = \left[(I + A_1)^{-1} f\right](x,y),$$

или, что то же,

$$w(x,y)+(I+A_1)^{-1}\left(-\frac{a}{\kappa_2}(Kw)\right)(x,y)=\left[(I+A_1)^{-1}f\right](x,y).$$

На основании равенства (39)

$$\left[w+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_1^n\left(-\frac{a}{\kappa_2}(Kw)\right)\right](x,y)=\left[(I+A_1)^{-1}f\right](x,y).$$

Поскольку функция Kw не зависит от y, это соотношение, согласно лемме 1.6, эквивалентно тому, что

$$\left[w-\frac{1}{\kappa_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(A_1^n a)\right)(Kw)\right](x,y)=\left[(I+A_1)^{-1}f\right](x,y).$$

Введем обозначения

$$\widetilde{a}(x,y):=-\frac{1}{\kappa_2}\,a(x,y)\,\exp\left\{-\int_0^y a(x,t)dt\right\},$$

$$f_1(x,y):=(I+A_1)^{-1}f.$$

На основании леммы 1.7 функция $w(x,y)$ оказывается решением интегрального уравнения

$$w(x,y)+\widetilde{a}(x,y)\int_0^Y K_2(\eta)\int_0^\eta w(x,t)\,dt\,d\eta=f_1(x,y) \tag{41}$$

и, следовательно, удовлетворяет соотношению

$$\int_0^Y K_2(y)\int_0^y\left(w(x,t)+\widetilde{a}(x,t)\int_0^Y K_2(z)\int_0^z w(x,s)ds\,dz\right)dt\,dy=$$

$$=\int_0^Y K_2(y)\int_0^y f_1(x,t)\,dt\,dy. \tag{42}$$

Вместе с (40) это дает

$$\left(\int_0^Y K_2(y)\int_0^y w(x,t)dt\,dy\right)\left(1+\int_0^Y K_2(y)\int_0^y \widetilde{a}(x,t)dt\,dy\right)=$$

$$=\int_0^Y K_2(y)\int_0^y f_1(x,t)dt\,dy.$$

Кроме того,

$$\int_0^Y K_2(y)\int_0^y \widetilde{a}(x,t)dt\,dy = -\frac{1}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(y)\left(\int_0^y a(x,t)\exp\left\{-\int_0^t a(x,\bar{t})\,d\bar{t}\right\}dt\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(y)\left(\int_0^y \frac{\partial}{\partial t}\exp\left\{-\int_0^t a(x,\bar{t})\,d\bar{t}\right\}dt\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(y)\left(\exp\left\{-\int_0^y a(x,t)\,dt\right\}-1\right)dy =$$

$$= -1 + \frac{1}{\kappa_2}\int_0^Y K_2(y)\exp\left\{-\int_0^y a(x,t)\,dt\right\}dy.$$

Комбинируя два последних соотношения и используя условие (37), мы находим, что

$$\int_0^Y K_2(y)\int_0^y w(x,t)\,dt\,dy =$$

$$= \frac{\kappa_2}{\displaystyle\int_0^Y K_2(y)\ \exp\left\{-\int_0^y a(x,t)\,dt\right\}dy}\int_0^Y K_2(y)\int_0^y f_1(x,t)\,dt\,dy. \tag{43}$$

Подставляя правую часть (43) в уравнение (41), мы находим единственное решение интегрального уравнения (38) в виде

$$w(x,y) = f_1(x,y) - \frac{\kappa_2\widetilde{a}(x,y)}{\displaystyle\int_0^Y K_2(y)\exp\left\{-\int_0^y a(x,t)\,dt\right\}dy}\int_0^Y K_2(y)\int_0^y f_1(x,t)dt\,dy. \blacksquare$$

Лемма 1.9. *Оператор B, определенный в* (36), *является компактным в пространстве $C(D)$.*

Доказательство. Введем обозначение

$$(B_1w)(x,y) := \widetilde{c}(x,y)\int_0^x\int_0^y w(s,t)\,dt\,ds \quad \text{в } D,$$

$$(B_2 w)(x,y) := -\frac{\widetilde{c}(x,y)}{\widetilde{\kappa}_1} \int\limits_0^X \widetilde{K}_1(\xi) \int\limits_0^\xi \int\limits_0^y w(s,t)\,dt\,ds\,d\xi \quad \text{in } D,$$

$$(B_3 w)(x,y) := -\frac{\widetilde{c}(x,y)}{\kappa_2} \int\limits_0^Y K_2(\eta) \int\limits_0^x \int\limits_0^\eta w(s,t)\,dt\,ds\,d\eta \quad \text{в } D,$$

$$(B_4 w)(x,y) =: \frac{\widetilde{c}(x,y)}{\widetilde{\kappa}_1\ \kappa_2} \int\limits_0^X \int\limits_0^Y \widetilde{K}_1(\xi) K_2(\eta) \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta w(s,t)\,dt\,ds\,d\eta\,d\xi \quad \text{в } D.$$

Тогда

$$(Bw)(x,y) = \big[(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)w\big](x,y).$$

Проверим компактность каждого из операторов B_j. Возьмем произвольное ограниченное множество $M \subset C(D)$ и докажем, что его образ $B_j(M)$ при каждом значении $j = 1, 2, 3, 4$ предкомпактен, т. е. замыкание $\overline{\mathcal{B}_j(M)}$ компактно. Введем оператор

$$(\widetilde{B}_1 w)(x,y) := \int\limits_0^x \int\limits_0^y w(s,t)\,dt\,ds \quad \text{в } D$$

и обозначим через Q_1 замыкание образа $\widetilde{\mathcal{B}}_1(M)$ множества M при отображении $\widetilde{\mathcal{B}}_1$. Пусть

$$|w| \leqslant m$$

для всех элементов $w \in M$. Тогда для тех же w справедлива оценка

$$|\widetilde{\mathcal{B}}_1 w| = \left| \int\limits_0^X \int\limits_0^Y w(s,t)\,ds\,dt \right| \leqslant XYm,$$

свидетельствующая о равномерной ограниченности множества Q_1. Для доказательства его равностепенной непрерывности (гарантирующей компактность Q_1, согласно критерию Арцеля) фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любой точки $(x,y) \in D$ обозначим через $B^r_{(x,y)}$ шар радиуса r с центром в точке (x,y). Тогда для произвольной функции $w \in Q_1$ в каждой точке $(x_1, y_1) \in D \cap B^r_{(x,y)}$ выполняется неравенство

$$|v(x_1,y_1) - v(x,y)| = \left| \int\limits_0^{x_1} \int\limits_0^{y_1} w(s,t)\,dt\,ds - \int\limits_0^x \int\limits_0^y w(s,t)\,dt\,ds \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} w(s,t)\,dt\,ds - \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y} w(s,t)\,dt\,ds + \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y} w(s,t)\,dt\,ds - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y} w(s,t)\,dt\,ds \right| \leqslant \left| \int\limits_0^{x_1}\int\limits_{y_1}^{y} w(s,t)\,dt\,ds \right| + \left| \int\limits_x^{x_1}\int\limits_0^{y} w(s,t)\,dt\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant M\ (X|y_1 - y| + Y|x_1 - x|) \leqslant M\ r\ (X + Y). \tag{44}$$

Ясно, что если

$$r \leqslant \frac{\varepsilon}{(X+Y)M},$$

то левая часть неравенства (44) не превосходит ε. Таким образом, для любой функции $v \in Q_1$ и для любого $\delta < r$ справедливо неравенство

$$\sup_{\substack{(x,y)\in D \\ (x_1,y_1)\in D \bigcap B^{\delta}_{(x,y)}}} |v(x_1,y_1) - v(x,y)| \leqslant \varepsilon.$$

Последнее как раз и означает требуемую равностепенную непрерывность множества $\widetilde{\mathcal{B}}_1(M)$, а значит, и компактность оператора $\widetilde{\mathcal{B}}_1$. Поскольку оператор умножения

$$w(x,y) \to c(x,y)w(x,y)$$

ограничен в пространстве $C(D)$, его композиция с компактным оператором $\widetilde{B}_1$ является компактным оператором.

Проверим теперь компактность оператора

$$\widetilde{B}_2 : w \to \int\limits_0^X \widetilde{K}_1(\xi) \int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{y} w(s,t)\,dt\,ds\,d\xi \quad \text{в } D.$$

Пусть M и Q_2 имеют тот же смысл, что M и Q_2 в случае оператора $\widetilde{\mathcal{B}}_1$. Докажем, что множество Q_2 компактно в $C(D)$. Поскольку ограниченность Q_2 не вызывает сомнений ввиду оценки

$$|\widetilde{B}_2 w(y)| = \left| \int\limits_0^X \widetilde{K}_1(\xi) \int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{y} w(s,t)\,dt\,ds\,d\xi \right| \leqslant m\,XY \int\limits_0^X \left|\widetilde{K}_1(\xi)\right| d\xi$$

для каждой функции $v \in M$, остается проверить равностепенную непрерывность множества Q_2. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем две произвольные точки y и y_1 на интервале I_y, для которых

$$|y - y_1| < r,$$

где r будет выбрано позднее. Тогда для любой функции $v \in Q_2$ мы находим, что

$$|v(y_1) - v(y)| = \left| \int\limits_0^X \widetilde{K}_1(\xi) \int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{y_1} w(s,t)\,dt\,ds\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^X \widetilde{K}_1(\xi) \int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{y} w(s,t)\,dt\,ds\,d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant mX\,|y_1 - y| \int\limits_0^X |\widetilde{K}_1(\xi)|\,d\xi \leqslant mX\,\delta \int\limits_0^X |\widetilde{K}_1(\xi)|\,d\xi. \qquad (45)$$

Отсюда следует, что если

$$r < \frac{\varepsilon}{mX \int\limits_0^X |\widetilde{K}_1(\xi)| d\xi},$$

то левая часть в неравенстве (45) не превосходит ε, что и требуется доказать. Наконец, как и выше, компактность оператора $\mathcal{B} = c\widetilde{\mathcal{B}}_2$ следует из инвариантности подпространства компактных операторов относительно умножения на непрерывные функции.

Поскольку оператор $\mathcal{B}_3$ имеет ту же структуру, что оператор $\mathcal{B}_2$, для завершения доказательства леммы 1.9 остается установить компактность оператора

$$(\widetilde{B}_4 w)(x,y) := \int\limits_0^X\int\limits_0^Y \widetilde{K}_1(\xi)K_2(\eta) \int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\eta} w(s,t)\,dt\,ds\,d\eta\,d\xi \quad \text{в } D.$$

Этот факт немедленно следует из его ограниченности и одномерности его области значений.

Подводя итоги, мы можем констатировать, что поскольку, по доказанному, оператор $I + A_1 + A_2$ обратим, а оператор $\mathcal{B}$ компактен в пространстве $C(D)$, рассматриваемый интегральный оператор $\mathcal{C} = I + A_1 + A_2 + \mathcal{B}$ является фредгольмовым.

Возвратимся теперь к доказательству теоремы 1.5. Нам остается доказать, что

$$\dim\ker\mathcal{P} < \infty, \qquad \dim\operatorname{coker}\mathcal{P} < \infty \qquad (46)$$

и что область значений оператора $\mathcal{P}$ замкнута. Сопоставим каждой функции $u(x,y) \in \ker\mathcal{P}$ функцию $v(x,y) = \partial_x\partial_y u(x,y)$, принадлежащую, как мы видели, подпространству $\ker\mathcal{C}$. Покажем, что такое отображение переводит линейно независимые элементы ядра $\ker\mathcal{P}$ в линейно независимые функции. Действительно, пусть

$$\{u_j(x,y)\}_1^N \subset \ker\mathcal{P},$$

причем, если $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j u_j(x,y) = 0$ в D, то все числа λ_j равны 0. Рассмотрим N функций

$$v_j(x,y) = \partial_x\partial_y u_j(x,y), \quad j = 1,\dots,N,$$

и допустим, что они линейно зависимы, так что для некоторого ненулевого набора вещественных чисел $c_1,\dots,c_N$

$$c_1 v_1(x,y) + \dots + c_N v_N(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$U(x,y) = \sum_{j=1}^{N} c_j u_j(x,y).$$

Очевидно, что согласно выбору функций u_j соотношения

$$\partial_x\partial_y U(x,y) = 0, \qquad (K_1 u)(x) = 0, \qquad (K_2 u)(y) = 0$$

выполняются во всех точках $(x,y) \in D$. Однако, согласно предложению 1.1, это означает, что $U(x,y) \equiv 0$, в противоречии с предположенной линейной независимостью функций $u_j(x,y)$. Тем самым доказано, что

$$\dim\ker\mathcal{P} \leqslant \dim\ker\mathcal{C}.$$

Докажем теперь, что

$$\dim\operatorname{coker}\mathcal{P} \leqslant \dim\operatorname{coker}\mathcal{C}. \tag{47}$$

В самом деле, пусть 3-векторы

$$Z_j = \{f_j(x,y),\ \varphi_j(x),\ \psi_j(y)\}_1^N$$

не входят в область значений $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ оператора $\mathcal{P}$. Это означает, как показывает теорема 1.2, что соответствующие функции

$$\mathcal{H}_j(x,y) = f_j(x,y) - \ell\big(\varphi_j(x), \psi_j(y)\big),$$

где

$$\ell\big(\varphi(x), \psi(y)\big) := \frac{a(x,y)}{\kappa_2}\varphi'(x) + \frac{b(x,y)}{\kappa_1}\psi'(y) +$$

$$+ \frac{c(x,y)}{\kappa_1\kappa_2}\left(\frac{1}{2}\int_0^X K_1(x)\varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^Y K_2(y)\psi(y)\,dy - \kappa_1\varphi(x) - \kappa_2\psi(y)\right),$$

не входят в область значений оператора $\mathcal{C}$. При этом, как и выше, если выбранные нами 3-векторы Z_j линейно независимы по модулю пространства $\mathcal{R}(\mathcal{P})$, то согласно той же теореме 1.2 отмеченные выше функции $\mathcal{H}_j(x,y)$ оказываются линейно независимыми по модулю пространства $\mathcal{R}(\mathcal{C})$. Это немедленно приводит к неравенству (47), а значит, и к неравенствам (46).

Для доказательства замкнутости области значений оператора $\mathcal{P}$ рассмотрим последовательность элементов

$$(f_n, \varphi_n, \psi_n) = \mathcal{P}u_n, \quad u_n \in \mathcal{W},$$

пространства $\mathcal{V}$, сходящуюся при $n \to \infty$ к (f, φ, ψ). Ввиду непрерывности оператора ℓ последовательность функций

$$F_n = f_n - \ell(\varphi_n, \psi_n)$$

сходится в пространстве $C(D)$ к некоторой функции $F(x,y)$. Согласно теореме 1.2, функции F_n представимы в виде $F_n = \mathcal{C}w_n$. Ввиду фредгольмовости оператора $\mathcal{C}$, функция F имеет вид $F = \mathcal{C}w$ при некотором w. На основании той же теоремы 1.2 задача $\mathcal{P}u = (f, \varphi, \psi)$ с $f - \ell(\varphi, \psi) = F$ разрешима, что и доказывает требуемое.

Тем самым завершается доказательство теоремы 1.5. ■

Замечание 4. Легко видеть, что условие $b(x,y) = b(x)$ в теореме 1.5 можно заменить условием достаточной малости величины

$$\max_y \max_x |b(x,y) - b(x,0)| X.$$

Замечание 5. Результат теоремы 1.5 является точным: *при нарушении условия* (33) *задача* $(\mathcal{P})$ *может потерять свойство фредгольмовости.*

Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_{xy} + \dfrac{\cos y}{\sin y + 2} u_x = 0 \quad \text{в} \quad \operatorname{int} D, \\ \displaystyle\int_0^1 u(x,y)dx = 0 \quad \text{в} \quad I_y, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin y\,(\sin y + 2) u(x,y) dy = 0 \quad \text{в} \quad I_x. \end{cases}$$

Условие (33) нарушено, так как при всех x

$$\int_0^Y K_2(y) \exp\left\{-\int_0^y a(x,t)\,dt\right\} dy = 0,$$

что проверяется непосредственно. При любой заданной функции $f(x) \in C^1(I_x)$ решением этой задачи является функция

$$u(x,y) = \frac{f(x) - \int\limits_0^1 f(x)\,dx}{\sin y + 2}.$$

Но это означает, что

$$\dim\ker\mathcal{P} = \infty,$$

так что проблема не является фредгольмовой.

§ 2. Нелокальная квазиграничная задача

В настоящей главе мы рассматриваем нелокальную задачу для оператора $\mathcal{L}$ в той же области D, но с дополнительными условиями, связывающими значения неизвестной функции не на двумерном подмножестве в D, а на дискретной системе отрезков вида $x = x_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n$, и $y = y_k,\ k = 1, \ldots, m$. Как и выше, будут определены условия, при которых рассматриваемая задача однозначно разрешима, а также условия ее фредгольмовости. Разумеется, обе задачи, изучаемые в данной работе, могут быть объединены, если рассматривать их в рамках теории распределений. Однако такой подход не дает (пока что) существенно новых результатов, но требует известной аккуратности и удлиняет изложение.

2.1. Постановка задачи

В той же области $D = \{\ (x,y)|\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y\}$, что и выше, рассматривается задача

$$(\mathcal{P}_d) \qquad \begin{cases} \partial_x\partial_y u + a(x,y)\partial_x u + b(x,y)\partial_y u + c(x,y)u = f(x,y), \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j u(x_j,y) = \varphi(y),\ 0 \leqslant y \leqslant Y, \\ \sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k u(x,y_k) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant X, \end{cases}$$

в которой $0 \leqslant x_j \leqslant X,\ 0 \leqslant y_k \leqslant Y$ при всех значениях j и k, все α_j и β_k суть вещественные числа, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ и $f(x,y)$ — непрерывные функции, $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Решение

$u(x,y)$ задачи $(\mathcal{P}_d)$ предполагается элементом пространства $\mathcal{W}$. Как и в классической задаче Гурса, функции φ и ψ не могут выбираться произвольно. Поскольку в силу второго и третьего соотношений в задаче $(\mathcal{P}_d)$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_k u(x_j,y_k)=\sum_{k=1}^{m}\beta_k\varphi(y_k)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_j\beta_k u(x_j,y_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi(x_j),$$

условие

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi(x_j)=\sum_{k=1}^{m}\beta_k\varphi(y_k) \tag{48}$$

является необходимым для разрешимости задачи $(\mathcal{P}_d)$. Как мы увидим в дальнейшем, никакие дополнительные необходимые условия разрешимости не возникают.

В дальнейшем условимся обозначать через $(\mathcal{P}_d)$ линейный оператор

$$\mathcal{W}\ni u\to(f,\varphi,\psi)\in C(D)\times C^1(I_x)\times C^1(I_y),$$

определяемый левой частью соотношений $(\mathcal{P}_d)$.

2.2. Модельная задача

Как и выше, задача $(\mathcal{P}_d)$ будет рассматриваться в рамках теории возмущений линейных операторов. Центральную роль при этом играет обратный оператор, соответствующий следующей задаче:

$$\partial_x\partial_y u=f(x,y)\quad \text{в } D, \tag{49}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u(x_j,y)=\varphi(y)\qquad \text{в } I_x, \tag{50}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\beta_k u(x,y_k)=\psi(x)\qquad \text{в } I_y. \tag{51}$$

Предполагается, конечно, выполнение условия (48).

Пусть сначала $f=0$. Тогда общее решение уравнения (49) имеет вид

$$u(x,y)=v(x)+w(y),$$

где $v(x)$ и $w(y)$ — произвольные функции из пространств $C^1(I_x)$ и $C^1(I_y)$, соответственно. Применяя условия (50) и (51) вкупе с (48), приходим к соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v(x_j) + \alpha w(y) = \varphi(y), \quad \sum_{k=1}^{m} \beta_k w(y_k) + \beta v(x) = \psi(x), \tag{52}$$

где

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \quad \text{и} \quad \beta = \sum_{k=1}^{m} \beta_k.$$

Отсюда следует, что если $\alpha\beta = 0$, то по крайней мере одна из функций $\varphi(y), \psi(x)$ обязана быть постоянной, что резко сужает класс рассматриваемых задач. Поэтому в дальнейшем *предполагается выполненным условие* $\alpha\beta \neq 0$, что позволяет, на основании (52), представить функцию $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = \frac{\varphi(y)}{\alpha} + \frac{\psi(x)}{\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha} v(x_j) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\beta} w(y_k).$$

Поскольку, как следует из (52),

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha} v(x_j) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\beta} w(y_k) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\beta\alpha} \varphi(y_k),$$

предыдущее равенство приводит к явному решению задачи (49)–(51) при $f = 0$:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(y)}{\alpha} + \frac{\psi(x)}{\beta} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k \varphi(y_k)}{\alpha\beta}.$$

Бросающаяся в глаза несимметричность этой формулы относительно переменных x и y оказывается кажущейся, если воспользоваться необходимым условием (48) и переписать последнее соотношение в форме

$$u(x, y) = \frac{\varphi(y)}{\alpha} + \frac{\psi(x)}{\beta} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k \varphi(y_k)}{\alpha\beta} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha\beta} \psi(x_j) \right). \tag{53}$$

В случае произвольной функции f решение задачи (49)–(51) допускает представление вида

$$u(x, y) = F(x, y) + v(x) + w(y),$$

в котором

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(s, t)\, ds\, dt,$$

а $v(x)$ и $w(y)$ — некоторые C^1-функции на соответствующих интервалах.

Вводя новую неизвестную функцию $G = u - F$, мы приходим к задаче

$$\begin{cases} \partial_x \partial_y G(x, y) = 0 \quad \text{в} \quad ;D, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j G(x_j, y) = \varphi(y) - \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j F(x_j, y), \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k G(x, y_k) = \psi(x) - \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k F(x, y_k), \end{cases}$$

решением которой, в силу сказанного выше, является функция

$$G(x, y) = \frac{\varphi(y)}{\alpha} + \frac{\psi(x)}{\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha} F(x_j, y) - \\ - \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\beta} F(x, y_k) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\beta} \varphi(y_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\alpha} \frac{\beta_k}{\beta} F(x_j, y_k).$$

Таким образом, функция

$$u(x, y) = F(x, y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha} F(x_j, y) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\beta} F(x, y_k) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\alpha} \frac{\beta_k}{\beta} F(x_j, y_k) + \frac{\varphi(y)}{\alpha} + \frac{\psi(x)}{\beta} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k \varphi(y_k)}{\alpha\beta} \tag{54}$$

представляет собой единственное решение модельной задачи (49)–(51).

Если трактовать левую часть соотношений (49)–(51) как линейный оператор

$$\mathcal{P}_0 : \mathcal{W} \ni u \to (f, \varphi, \psi) \in C(D) \times C^1(I_x) \times C^1(I_y),$$

то правая часть соотношения (54) может быть истолкована как обратный оператор $\mathcal{P}_0^{-1}$, существование которого тем самым доказано. Именно интерпретация исследуемого оператора $\mathcal{P}_d$ как возмущения оператора $\mathcal{P}_0$ играет центральную роль в решении задачи $(\mathcal{P}_d)$.

2.3. Однозначная разрешимость задачи $(\mathcal{P}_d)$

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

если h обозначает скалярную величину, то $\overline{h} = \max |h|$;

$$\overline{k}_1 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_j|}{|\alpha|}, \quad \overline{k}_2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} |\beta_k|}{|\beta|}; \quad \gamma = \max\{\overline{a}Y, \overline{b}X, \overline{c}XY\}, \quad \kappa = \max\{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_1\overline{k}_2\}.$$

Основной результат этого пункта работы составляет следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если выполняются условия* (48) *и*

$$5\kappa\gamma e^{9\gamma} < 1, \tag{55}$$

то задача $(\mathcal{P})$ *однозначно разрешима в пространстве* $\mathcal{W}$ *при любых функциях* $(f, \varphi, \psi) \in C(D) \times C^1(I_x) \times C^1(I_y)$.

Доказательство. Представим задачу $(\mathcal{P})$ в операторной форме

$$\mathcal{P}u = (f, \varphi, \psi), \tag{56}$$

где $f \in C(D)$, $\varphi \in C^1(I_y)$, $\psi \in C^1(I_x)$, и введем новую неизвестную функцию $g \in C(D)$ с помощью соотношения

$$u = \mathcal{P}_0^{-1}(g, \varphi, \psi).$$

Из результатов предыдущего пункта следует, что оператор $\mathcal{P}_0$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространством $\mathcal{W}$ и $C(D)\times C^1(I_x)\times \times C^1(I_y)$. Подставляя указанную функцию u в уравнение (56), мы приходим к уравнению

$$(\mathcal{P} \circ \mathcal{P}_0^{-1})(g, \varphi, \psi) = (f, \varphi, \psi), \tag{57}$$

эквивалентному задаче $(\mathcal{P})$. Роль неизвестной функции в этом уравнении играет функция g. Чтобы выписать последнее уравнение в явной форме, воспользуемся соотношением (54), в котором правая часть при

$$F(x, y) = \int_0^x\int_0^y g(s, t)\, ds\, dt, \quad (x, y) \in I_x \times I_y,$$

представляет собой функцию $\mathcal{P}_0^{-1}(g, \varphi, \psi)$. Выполняя все нужные действия, мы приходим к следующей форме уравнения (57), являющейся отправной точкой доказательства теоремы 2.1:

$$g(x, y) + a(x, y) \int_0^y g(x, t)\, dt + b(x, y) \int_0^x g(s, y)\, ds +$$

$$+ c(x, y) \int_0^x\int_0^y g(s, t)\, ds\, dt - a(x, y) \sum_{k=1}^m \frac{\beta_k}{\beta} \int_0^{y_k} g(x, y)\, dy -$$

$$- b(x, y) \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha} \int_0^{x_j} g(x, y)\, dx + c(x, y)\Bigl(\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha} \int_0^{x_j} \int_0^{y} g(x, t)\, dx\, dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k}{\beta}\int\limits_0^{y_k}\int\limits_0^{x} g(s,y)\,ds\,dy+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_j}{\alpha}\frac{\beta_k}{\beta}\int\limits_0^{x_j}\int\limits_0^{y_k} g(x,y)\,dx\,dy\Bigg)=$$
$$=\widetilde{f}(x,y), \tag{58}$$

где

$$\widetilde{f}(x,y)=f(x,y)-a(x,y)\psi'(x)-b(x,y)\varphi'-$$
$$-c(x,y)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\psi(x_j)}{\alpha\beta}-\frac{\varphi(y)}{\alpha}-\frac{\psi(x)}{\beta}\right).$$

Как заданная функция $f(x,y)$, так и искомая функция $g(x,y)$ предполагаются здесь непрерывными в D.

Аналогично доказательству теоремы 1.3, введем операторы

$$Ag:=a(x,y)\int\limits_0^{y} g(x,t)\,dt+b(x,y)\int\limits_0^{x} g(s,y)\,ds+c(x,y)\int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y} g(s,t)\,ds\,dt$$

и

$$Bg:=-a(x,y)\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k}{\beta}\int\limits_0^{y_k} g(x,y)\,dy-b(x,y)\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha}\int\limits_0^{x_j} g(x,y)\,dx+$$
$$+c(x,y)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha}\int\limits_0^{x_j}\int\limits_0^{y} g(x,t)\,dx\,dt+\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k}{\beta}\int\limits_0^{y_k}\int\limits_0^{x} g(s,y)\,ds\,dy+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_j}{\alpha}\frac{\beta_k}{\beta}\int\limits_0^{x_j}\int\limits_0^{y_k} g(x,y)\,dx\,dy\right).$$

Тогда уравнение (58) в операторной форме принимает вид

$$(I+A)g+Bg=f. \tag{59}$$

Как следует из леммы 1.4, оператор $I+A$ обратим в пространстве $C(D)$ и

$$\|(I+A)^{-1}\|\leqslant e^{9\gamma}.$$

С другой стороны, оператор B тривиальным образом допускает в пространстве $C(D)$ оценку

$$\|B\|\leqslant\overline{a}Y\overline{k}_2+\overline{b}X\overline{k}_1+3\overline{c}XY\overline{k}_1\overline{k}_2\leqslant 5\gamma\overline{k}.$$

Поскольку соотношение (59) равносильно тому, что

$$g + (I + A)^{-1} B g = (I + A))^{-1} f, \tag{60}$$

полученные выше оценки операторов $(I + A)^{-1}$ и B вместе с условием (55) гарантируют однозначную разрешимость уравнения (60) при любых непрерывных функциях f. Это завершает доказательство теоремы 2.1. ■

2.4. Фредгольмовость задачи $(\mathcal{P}_d)$

В этом разделе мы изучим свойство разрешимости задачи $(\mathcal{P}_d)$ при условиях значительно менее ограничительных, чем в п. 2.2. Уже нет необходимости в малости диаметра области D, однако в той или иной форме малость D в одном из направлений сохраняется. Плата за это — фредгольмовость вместо однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

2.4.1. Сведение задачи $(\mathcal{P}_d)$ к интегральному уравнению. Здесь будет установлена связь между свойствами фредгольмовости оператора $\mathcal{P}_d$ и некоторого интегрального оператора $\mathcal{C}$, действующего в пространстве $C(D)$. С целью упрощения изложения примем соглашение, что

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \qquad \sum_{k=1}^{m} \beta_k = 1. \tag{61}$$

Это приведет к исключению из условий теорем зависимости возникающих констант от α и β (ср. предыдущий пункт).

Как показано выше, задача

$$\begin{cases} \partial_x \partial_y v(x, y) = g(x, y) & \text{в } D, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v(x_j, y) = \varphi(y) & \text{в } I_y, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \beta_k v(x, y_k) = \psi(x) & \text{в } I_x \end{cases} \tag{62}$$

однозначно разрешима в пространстве $\mathcal{W}$ при произвольных функциях $g \in C(D)$, $\varphi \in C^1(I_y)$, $\psi \in C^1(I_x)$. Ее решение (54) при выполнении условий (61) неожиданно допускает весьма изящную форму записи, которая в дальнейшем окажется и полезной с различных точек зрения. Заметим вначале, что группа слагаемых

$$F(x, y) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(x_j, y) - \sum_{k=1}^{m} \beta_k F(x, y_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \beta_k F(x_j, y_k),$$

входящая в представление решения $v(x, y)$ и равная

$$\int_0^x\int_0^y g(s,t)\,ds\,dt - \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^{x_j}\int_0^y g(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \sum_{k=1}^m \beta_k \int_0^{y_k}\int_0^x g(s,y)\,ds\,dy + \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^m \alpha_j\beta_k \int_0^{x_j}\int_0^{y_k} g(x,y)\,dy\,dx,$$

может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^m \alpha_j\beta_k \left[\int_0^x\int_0^y g(s,t)\,ds\,dt - \int_0^{x_j}\int_0^{y_k} g(s,t)\,ds\,dt - \right.$$

$$- \int_0^{x_j}\int_{y_k}^y g(s,t)\,ds\,dt - \int_0^{x_j}\int_0^{y_k} g(s,t)\,ds\,dt - \int_0^{y_k}\int_{x_j}^x g(s,t)\,ds\,dt +$$

$$\left. + \int_0^{x_j}\int_0^{y_k} g(s,t)\,ds\,dt\right] = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^m \alpha_j\beta_k \int_{x_j}^x\int_{y_k}^y g(s,t)\,ds\,dt.$$

В этом проще всего убедится, если заметить, что выражение в квадратных скобках есть не что иное, как

$$\int_T g\,ds\,dt - \int_{T_{11}} g\,ds\,dt - \int_{T_{12}} g\,ds\,dt - \int_{T_{11}} g\,ds\,dt - \int_{T_{21}} g\,ds\,dt + \int_{T_{11}} g\,ds\,dt,$$

где области $T_{k\ell}$ определяются рис. 1, а $T = \bigcup\limits_{1\leqslant k,\ell\leqslant 2} T_{k\ell}$.

Вместе с соотношением (54) это приводит к окончательной форме решения модельной задачи (62):

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^m \alpha_j\beta_k \int_{x_j}^x\int_{y_k}^y g(s,t)\,ds\,dt + \varphi(y) + \psi(x) - \sum_{k=1}^m \beta_k\varphi(y_k). \quad (63)$$

Явный вид (63) решения задачи (62) позволяет без труда установить следующий результат, относящийся уже к общему дифференциальному оператору

$$\mathcal{L} = \partial_x\partial_y + a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y + c(x,y).$$

Лемма 2.2. *Если функция* $v(x, y) \in \mathcal{W}$ *является решением задачи* (62), *то та же функция удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\mathcal{L}v = f(x,y) + a(x,y)\psi'(x) + b(x,y)\varphi'(y) + c(x,y)\Big(\varphi(y) + \psi(x) - \sum \beta_k\varphi(y_k)\Big),$$

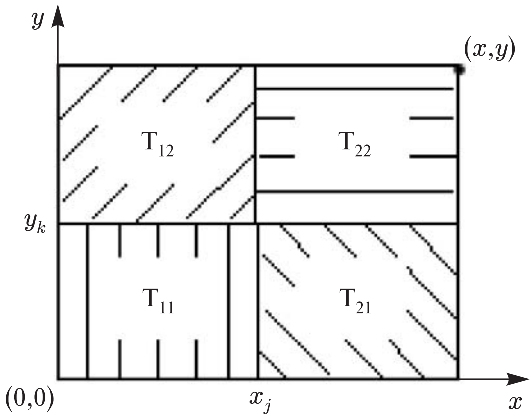

Рис. 1

в котором

$$f(x,y) = g(x,y) + a(x,y)\sum_{k=1}^{m}\beta_k\int\limits_{y_k}^{y} g(x,t)\,dt +$$

$$+\, b(x,y)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int\limits_{x_j}^{x} g(s,y)\,ds + +\, c(x,y)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_j\beta_k\int\limits_{x_j}^{x}\int\limits_{y_k}^{y} g(s,t)\,ds\,dt.$$

Доказательство. Очевидно, что если функция $v(x,y)$ определяется соотношением (63), то, как следует из (61),

$$\partial_x\partial_y v(x,y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_j\beta_k g(x,y) = g(x,y).$$

Далее, дифференцируя равенство (63), мы находим, что

$$\partial_x v(x,y) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big(\sum_{k=1}^{m}\beta_k\int\limits_{y_k}^{y} g(x,t)\,dt\Big) + \psi'(x) = \sum_{k=1}^{m}\beta_k\int\limits_{y_k}^{y} g(x,t)\,dt + \psi'(x)$$

и точно так же

$$\partial_y v(x,y) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int\limits_{x_j}^{x} g(s,y)\,ds + \varphi'(y).$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы. ■

Возникающий в лемме 2.2 интегральный оператор играет в дальнейшем фундаментальную роль и заслуживает поэтому специального обозначения:

$$\mathcal{C}g := g(x,y) + a(x,y)\sum_{k=1}^{m}\beta_k\int_{y_k}^{y} g(x,t)\,dt + b(x,y)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{x_j}^{x} g(s,y)\,ds + \\ + c(x,y)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_j\beta_k\int_{x_j}^{x}\int_{y_k}^{y} g(s,t)\,ds\,dt.$$

Более того, будет удобно использовать следующее

Определение. Оператор $\mathcal{C}$ называется *взаимным* к дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ относительно задачи $(\mathcal{P}_d)$. Введем еще одно обозначение

$$\ell\big(\varphi(y),\psi(x)\big) = a(x,y)\varphi'(y)+b(x,y)\psi'(x)+c(x,y)\Big(\varphi(y)+\psi(x)-\sum_{k=1}^{m}\beta_k\varphi(y_k)\Big).$$

Следующее утверждение характеризует глубокую связь между операторами $\mathcal{P}_d$ и $\mathcal{C}$.

Лемма 2.3. *Задача*

$$(\mathcal{P}_d)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{в } D,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u(x_j,y) = \varphi(y) & \text{в } I_y,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\beta_k u(x,y_k) = \psi(x), & \text{в } I_x, \end{cases}$$

разрешима для тех и только тех троек функций $f(x,y)$, $\varphi(y)$, $\psi(x)$, *для которых уравнение*

$$\mathcal{C}g = f(x,y) - \ell(\varphi(y),\psi(x))$$

имеет по крайней мере одно решение g.

Доказательство. Пусть функция $u(x,y)$ решает задачу $(\mathcal{P}_d)$. Введем в рассмотрение функцию $g(x,y) = \partial_x\partial_y u(x,y)$. Поскольку теперь $u(x,y)$ можно рассматривать как решение задачи (62), к ней применима лемма 2.2, и мы находим, что

$$\mathcal{L}u = \mathcal{C}g + \ell\big(\varphi(y),\psi(x)\big),$$

а значит,

$$\mathcal{C}g = f - \ell(\varphi,\psi).$$

Другими словами, функция g удовлетворяет нужному интегральному уравнению.

Обратно, пусть для некоторой тройки функций

$$\bigl(f(x,y),\ \varphi(y),\ \psi(x)\bigr)$$

функция $g(x,y)$ решает интегральное уравнение

$$\mathcal{C}g = f(x,y) - \ell(\varphi(y),\psi(x)).$$

Рассмотрим функцию $u(x,y) \in \mathcal{W}$, являющуюся единственным решением задачи (62). В силу леммы 2.2 эта функция удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}u = \mathcal{C}g + \ell(\varphi,\psi),$$

а значит, и уравнению $\mathcal{L}u = f$. Кроме того, по определению функция $u(x,y)$ нужным образом связана с заданными функциями φ и ψ. Тем самым лемма 2.3 доказана. ■

Две следующие леммы сводят вопрос о фредгольмовости задачи $(\mathcal{P}_d)$ к аналогичному вопросу об операторе $\mathcal{C}$.

Лемма 2.4. *Справедливы соотношения* $\dim\ker\mathcal{P}_d \leqslant \dim\ker\mathcal{C}$ *и* $\dim\operatorname{coker}\mathcal{P}_d \leqslant \dim\operatorname{coker}\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть функции $u_1(x,y),\ \ldots,\ u_N(x,y)$ образуют базис ядра задачи $(\mathcal{P}_d)$. Введем в рассмотрение функции $w_k(x,y) = \partial_x\partial_y u_k(x,y)$, $1 \leqslant k \leqslant N$. В силу леммы 2.3 мы находим, что, поскольку $\varphi = 0$, $\psi = 0$, соотношение

$$\mathcal{L}u_k = \mathcal{C}w_k + \ell(\varphi,\psi) = \mathcal{C}w_k$$

выполняется при всех $k = 1,\ldots,N$. Значит, $w_k \in \ker\mathcal{C}$ при тех же значениях k. Докажем линейную независимость функций $w_k(x,y)$. Допустим, что для ненулевого набора чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ при всех $(x,y) \in D$ выполняется соотношение

$$\lambda_1 w_1(x,y) + \ldots + \lambda_N w_N(x,y) = 0.$$

Введем функцию

$$U(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k(x,y).$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям

$$\partial_x\partial_y U(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j U(x,y) = 0, \quad (x,y) \in I_y,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k U(x, y) = 0, \quad (x, y) \in I_x$$

и, значит, как следует из (53), $U(x, y) \equiv 0$. Другими словами, функции $u_k(x, y)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, линейно зависимы — в противоречии с предположением о том, что они образуют базис.

Для доказательства второго неравенства в лемме допустим, что некоторая тройка функций $Z = \big(f(x, y),\, \varphi(y),\, \psi(x)\big)$ не принадлежит области значения $\mathcal{R}(\mathcal{P}_d)$ оператора $\mathcal{P}_d$. Из леммы 2.3 тогда следует, что функция

$$G_Z(x, y) = f(x, y) - \ell\big(\varphi(y), \psi(x)\big)$$

не входит в область значений оператора $\mathcal{C}$. Если тройки $Z_1, \dots, Z_N$ линейно независимы по модулю пространства $\mathcal{R}(\mathcal{P}_d)$, другими словами, при любом наборе чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$

$$\lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda_N Z_N \notin \mathcal{R}(\mathcal{P}_d),$$

то, согласно той же лемме 2.3,

$$\lambda_1 G_{Z_1} + \dots + \lambda_N G_{Z_N} \notin \mathcal{R}(\mathcal{C}),$$

ввиду линейности всех рассматриваемых операций. Это означает, очевидно, что

$$\dim \operatorname{coker} \mathcal{P}_d \leqslant \dim \operatorname{coker} \mathcal{C},$$

и лемма 2.4 тем самым доказана. ■

Лемма 2.5. *Если область значений $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ оператора $\mathcal{C}$ замкнута, то замкнутой является и область значений $\mathcal{R}(\mathcal{P}_d)$ оператора $\mathcal{P}_d$.*

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{P}_d u_n(x, y) = \Big(f_n(x, y), \varphi_n(x), \psi_n(y)\Big), \quad n = 1, 2, \dots,$$

причем последовательность (f_n, φ_n, ψ_n) при $n \to \infty$ сходится в пространстве $\mathcal{V}$ к $\Big(f(x, y), \varphi(x), \psi(y)\Big)$. Тогда последовательность функций

$$F_n(x, y) = f_n(x, y) - \ell\Big(\varphi_n(x), \psi_n(y)\Big)$$

сходится в пространстве $C(D)$ к некоторой функции $F(x, y)$. Поскольку область значений $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ замкнута, существует функция $w(x, y)$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathcal{C}w = F.$$

Согласно лемме 2.3, отсюда следует, что задача $\mathcal{P}_d u = (f, \varphi, \psi)$ также разрешима, что и доказывает лемму. ■

Из двух последних утверждений следует

Теорема 2.6. *Если оператор $\mathcal{C}$ фредгольмов, то и оператор $\mathcal{P}_d$ фредгольмов, каждый в своей паре пространств. Более того, если оператор $\mathcal{C}$ обратим, то обратимым является и оператор $\mathcal{P}_d$.*

2.4.2. Фредгольмовость оператора $\mathcal{C}$. Здесь будут найдены условия фредгольмовости $\mathcal{C}$ в терминах констант, определяющих оператор $\mathcal{P}_d$. Вместе с теоремой 2.6 это завершит изучение фредгольмовости задачи $\mathcal{P}_d$. Представим оператор $\mathcal{C}$ в виде суммы

$$\mathcal{C} = \mathcal{T} + \mathcal{K}$$

двух операторов

$$\mathcal{T} : g(x, y) \to g(x, y) + a(x, y) \sum_{k=1}^{m} \beta_k \int_{y_k}^{y} g(x, t)\, dt + b(x, y) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{x_j}^{x} g(s, y)\, ds$$

и

$$\mathcal{K} : g(x, y) \to c(x, y) \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \beta_k \int_{x_j}^{x} \int_{y_k}^{y} g(s, t)\, ds\, dt.$$

Определение. Оператор $\mathcal{T}$ называется *главной частью* оператора $\mathcal{C}$.

Оператор $\mathcal{K}$ очевидным образом является компактным в пространстве $C(D)$. Действительно, для всех функций $g(x, y)$ из единичной сферы пространства $C(D)$ множество функций $|\operatorname{grad} \mathcal{K}g|$ является равномерно ограниченным, и утверждение следует на основании критерия компактности Арцеля. Поэтому, на основании теоремы Рисса—Шаудера, для установления фредгольмовости оператора $\mathcal{C}$ достаточно проверить обратимость оператора $\mathcal{T}$.

Допустим вначале, что $b(x, y) = 0$ и, следовательно, главная часть оператора $\mathcal{C}$ имеет вид

$$\mathcal{T}g = g(x, y) + a(x, y) \sum_{k=1}^{m} \beta_k \int_{y_k}^{y} g(x, t)\, dt, \quad g \in C(\overline{D}).$$

Определение. Для любых двух наборов вещественных чисел $\{\beta_k\}_1^m$ и $\{y_k\}_1^m$, $y_k \in I_y$, мы обозначим через Γ_β линейный функционал над пространством $C(I_y)$ вида

$$\Gamma_\beta : f(y) \to \sum_{k=1}^{m} \beta_k f(y_k).$$

Лемма 2.7. *Если*

$$\Gamma_\beta\left(\exp\left\{-\int\limits_0^y a(x,t)\,dt\right\}\right) \neq 0 \tag{64}$$

при всех значениях x, то оператор $\mathcal{T}$ обратим в пространстве $C(D)$.

Доказательство. Поскольку переменная x в определении оператора $\mathcal{T}$ играет роль несущественного параметра, она может быть опущена для упрощения записи. Мы, следовательно, должны доказать, что *уравнение*

$$g(z) + a(z)\sum_{k=1}^m \beta_k \int\limits_{z_k}^z g(t)\,dt = h(z) \tag{65}$$

однозначно разрешимо при любой функции $h(z) \in C(I_y)$. Введем новую неизвестную функцию

$$G(z) = \int\limits_0^z g(t)\,dt,$$

удовлетворяющую условию $G(0) = 0$. Тогда новое уравнение

$$G'(z) + a(z)\sum_{k=1}^m \beta_k[G(z) - G(z_k)] = h(z)$$

эквивалентно уравнению (65) и может быть записано в виде

$$G'(z) + a(z)G(z) - a(z)\Gamma_\beta(G) = h(z). \tag{66}$$

Чтобы решить это уравнение, мы вычислим *à priori* константу $\Gamma_\beta(G)$, после чего его однозначная разрешимость становится очевидной. Умножая обе части уравнения (66) на $\exp\left\{\int\limits_0^z a(t)\,dt\right\}$ и интегрируя новое уравнение от 0 до z, мы находим, что

$$G(z)\exp\left\{\int\limits_0^z a(t)\,dt\right\} = \Gamma_\beta(G)\int\limits_0^z a(t)\exp\left\{\int\limits_0^t a(s)\,ds\right\}dt + h_1(z),$$

где

$$h_1(z) = \int\limits_0^z h(t)\exp\left\{\int\limits_0^t a(s)ds\right\}dt.$$

Вычисляя интеграл в правой части уравнения для G, мы находим, что

$$G(z) = (\Gamma_\beta G)\left[1 - \exp\left\{-\int\limits_0^z a(s)\,ds\right\}\right] + \widetilde{h}(z),$$

где

$$\widetilde{h}(z) = h_1(z)\exp\left\{-\int\limits_0^z a(s)\,ds\right\}.$$

Применяя к обеим частям этого равенства функционал Γ_β, мы приходим к соотношению

$$\Gamma_\beta(G)\Gamma_\beta\left(\exp\left\{-\int\limits_0^z a(s)\,ds\right\}\right) = \Gamma_\beta(\widetilde{h}).$$

Условие (64) позволяет определить константу $\Gamma_\beta(G)$ *à priori*, после чего однозначная разрешимость уравнения (66) становится очевидной. ■

Допустим теперь, что $b(x,y) = b(x)$ в проблеме $(\mathcal{P}_d)$. Тогда в соответствующем дифференциальном уравнении $\mathcal{L}u = f$ заменим $u(x,y)$ на неизвестную функцию

$$u(x,y)\exp\left\{\int\limits_0^x b(t)\,dt\right\}.$$

При этом задача $(\mathcal{P}_d)$ трансформируется в эквивалентную задачу

$$\begin{cases} \partial_x\partial_y u + a\partial_x u + (c - ab)u = f\exp\left\{\int\limits_0^x b(t)\,dt\right\}, \\ \sum\limits_{j=1}^n \alpha_j \exp\left\{-\int\limits_0^{x_j} b(t)\,dt\right\} u(x_j, y) = \varphi(y), \\ \sum\limits_{k=1}^m \beta_k u(x, y_k) = \psi(x)\exp\left\{-\int\limits_0^x b(t)\,dt\right\}, \end{cases}$$

к которой применима лемма 2.7. В результате мы приходим к следующему результату.

Лемма 2.8. *При выполнении условий*

$$\Gamma_\alpha\left(\exp\left\{-\int\limits_0^x b(s)\,ds\right\}\right) \neq 0 \quad \text{и} \quad \Gamma_\beta\left(\exp\left\{-\int\limits_0^y a(x,t)\,dt\right\}\right) \neq 0$$

для всех x оператор $\mathcal{T}$, соответствующий рассматриваемому дифференциальному оператору $\mathcal{L}$, является обратимым.

2.4.3. Главный результат. В настоящем пункте будут сформулирован и доказан основной результат, относящийся к нелокальной задаче $(\mathcal{P}_d)$, в случае дифференциального оператора $\mathcal{L}$ общего вида.

Теорема 2.9. *Рассмотрим задачу $(\mathcal{P}_d)$ с оператором*

$$\mathcal{L}u = \partial_x\partial_y u + a(x,y)\partial_x u + b(x,y)\partial_y u + c(x,y)$$

и константами $\{\alpha_j\}_1^n$, $\{\beta_k\}_1^m$, удовлетворяющими условиям

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{m}\beta_k\Big) \neq 0, \quad \Gamma_\alpha\left(\exp\left\{-\int\limits_0^x b(s,0)\,ds\right\}\right) \neq 0,$$

$$\Gamma_\beta\left(\exp\left\{-\int\limits_0^y a(x,t)\,dt\right\}\right) \neq 0 \quad \text{при всех } x.$$

Пусть

$$w_y(b) = \max_x |b(x,y) - b(x,0)|.$$

Если величина

$$\overline{w_y(b)}X$$

достаточно мала, то соответствующий оператор $\mathcal{P}_d$ является фредгольмовым.

Доказательство. Представим оператор $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}_0$ отличается от $\mathcal{L}$ только коэффициентом при ∂_y: в $\mathcal{L}_0$ этот коэффициент равен $b(x,0)$. Тогда соответствующие операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_0$, взаимные к $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$, соответственно, отличаются на оператор

$$g(x,y) \mapsto \Big(b(x,y) - b(0,y)\Big)\int\limits_0^x g(x,t)\,dt,$$

норма которого в пространстве $C(D)$ не превосходит

$$\overline{w_y(b)}X.$$

Очевидно, что ровно на столько же отличаются друг от друга соответствующие старшие части $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_0$ этих операторов. Поскольку обратимость оператора $\mathcal{T}_0$ была доказана выше (лемма 2.8), оператор $\mathcal{T}$ представим в виде

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + (\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) = \mathcal{T}_0\Big(I + \mathcal{T}_0^{-1}(\mathcal{T} - \mathcal{T}_0)\Big).$$

Отсюда немедленно следует, что при выполнении условия

$$\overline{w_y(b)}X < \|\mathcal{T}_0^{-1}\|$$

оператор $\mathcal{T}$ обратим в пространстве $C(D)$, а значит, оператор $\mathcal{C}$, взаимный с оператором $\mathcal{L}$ относительно задачи $(\mathcal{P}_d)$, является фредгольмовым. На основании леммы 2.4 и леммы 2.5 то же верно для оператора $\mathcal{P}_d$. Это завершает доказательство теоремы 2.9. ■

Литература

1. *Skubachevsky A. L.* Elliptic problems with nonlocal boundary conditions // Math. Sbornik. 1986. 279–302.
2. *Muravey L. A. and Filinovskii A. V.* On the non-local boundary value problems for a parabolic equation // Mathematical Notes. 1993. 54. 1045–1057.
3. *Paneah P.* Nonlocal problems for linear second order hyperbolic differential equations. Thesis, Technion, Israel, 2005.

Б. Панеях:
Technion,
e-mail: peter@tx.technion.ac.il

П. Панеях:
Technion,
e-mail: peter@mellanox.co.il