קומבינטוריקה של קבוצות קמורות - תרגילים

1. תהא $A \subset \mathbb{R}^d$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
   א. אם A סגורה אזי גם $\mathrm{conv}(A)$ סגורה.
   ב. אם A קומפקטית אזי גם $\mathrm{conv}(A)$ קומפקטית.

2. מצא באופן מפורש $d+1$ נקודות $v_1, \ldots, v_{d+1} \in \mathbb{R}^d$ המקיימות $|v_i - v_j| = 1$ לכל $1 \leq i < j \leq d+1$.

3. יהיו $K_1, \ldots, K_n$ תיבות מקבילות לצירים ב־ $\mathbb{R}^d$.
   הוכח כי אם כל שתיים מביניהן נחתכות, אזי כולן נחתכות.

4. יהיו $K, K_1, \ldots, K_n$ קבוצות קמורות ב־ $\mathbb{R}^d$. נתון כי לכל $I \subset [n]$ המקיימת $|I| \leq d+1$, קיימת הזזה $x+K$ של K החותכת את K_i לכל $i \in I$.
   הוכח כי קיימת הזזה $y+K$ החותכת את K_i לכל $1 \leq i \leq n$.

5. תהא K קמורה ב־ $\mathbb{R}^d$, ויהיו $D_1, \ldots, D_m$ חצאי־מרחב סגורים ב־ $\mathbb{R}^d$ המקיימים $K \subset \cup_{i=1}^m D_i$. הוכח כי קיימת $I \subset [m]$ המקימת $|I| \leq d+1$ כך ש־ $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$.

6. תהא $A \subset \mathbb{R}^d$ קומפקטית. נאמר כי הנקודה $a \in A$ רואה את הנקודה $b \in A$ אם הקטע הסגור $[a,b]$ מוכל ב־ A.
   נתון כי לכל $d+1$ נקודות $b_1, \ldots, b_{d+1} \in A$ קיימת $a \in A$ הרואה את כולן.
   הוכח כי A קבוצה כוכבית, כלומר קיימת $x \in A$ הרואה את כל נקודות A.

7. הוכח את הגרסא החרוטית של משפט קרתיאודורי הססגוני:
   אם $A_1, \ldots, A_d$ קבוצות סופיות ב־ $\mathbb{R}^d$ כך ש־ $p \in \cap_{i=1}^d pos(A_i)$,
   אזי קיימות $a_1 \in A_1, \ldots, a_d \in A_d$ כך ש־ $p \in pos\{a_1, \ldots, a_d\}$.

8. תהא $\mathcal{F}$ משפחה סופית של קבוצות, כך ש־ $|F| \leq d$ לכל $F \in \mathcal{F}$.
   א. הוכח כי אם $\cap_{i=1}^{d+1} F_i \neq \emptyset$ לכל $F_1, \ldots, F_{d+1} \in \mathcal{F}$, אזי $\cap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.
   ב. הוכח כי אם $\cap_{i=1}^{k} F_i \neq \emptyset$ לכל $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$, אזי $\tau(\mathcal{F}) \leq \frac{d-1}{k-1} + 1$.

9. יהא $T = (V, E)$ עץ, ויהיו $T_1 = (V_1, E_1), \ldots, T_n = (V_n, E_n)$ תתי־עצים של T המקיימים $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ לכל $1 \leq i < j \leq n$. הוכח כי $\cap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$.

10. תהא K קבוצה קמורה סגורה שאינה חסומה. הוכח כי K מכילה קרן, כלומר קבוצה מהצורה $\{a + tb : t \geq 0\}$ כאשר $a, 0 \neq b \in \mathbb{R}^n$.

11. יהיו $K_1, \ldots, K_m$ קטעים סגורים במישור שכולם מקבילים לציר ה־ y. נניח שלכל $I \subset [m]$ המקיימת $|I| \leq d+2$, קיים פולינום $p(x)$ ממעלה לכל היותר d שהגרף שלו חותך את K_i לכל $i \in I$. הוכח כי קיים פולינום $p(x)$ ממעלה לכל היותר d שהגרף שלו חותך את K_i לכל $1 \leq i \leq m$.

12. תהיינה $A_1,\dots,A_{(m-1)n+1}$ תת־קבוצות לא ריקות של $[n]$.
הוכח כי קיימות m קבוצות זרות לא־ריקות $I_1,\dots,I_m\subset[(m-1)n+1]$ כך שמתקיים

$$\bigcup_{i\in I_1}A_i=\cdots=\bigcup_{i\in I_m}A_i \quad .$$

תן דוגמא למשפחה של $(m-1)n$ קבוצות כנ"ל שעבורן אין חלוקה כנ"ל.

13. תהא $A\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה קמורה. פונקציה $f:A\to\mathbb{R}$ נקראית <u>קמורה</u> אם

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

לכל $x,y\in A$ ו־ $0\le\lambda\le 1$.
נסמן ב־ E_f את קבוצת הנקודות ב־ A אשר בהן f אינה גזירה.

א. תהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ קמורה. הוכח כי E_f היא בת־מנייה.

ב. תהא $A\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה קמורה ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ קמורה.
הוכח כי אם $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ קיים לכל $1\le i\le n$, אזי f גזירה ב־ a.

ג. הוכח כי אם f קמורה על $\mathbb{R}^n$ אזי E_f היא קבוצה בעלת מידה אפס.

14. תהא K קבוצה קמורה קומפקטית ב־ $\mathbb{R}^d$. <u>פונקצית התומך</u> של K

$$h_K:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$$

מוגדרת ע"י:

$$h_K(u)=\max\{x\cdot u : x\in K\} \quad .$$

לכל $u\in\mathbb{R}^d$ נסמן

$$T_K(u)=\{x\in K : x\cdot u=h_K(u)\} \ .$$

א. הראה כי h_K היא פונקציה קמורה.

ב. יהא $0\ne u\in\mathbb{R}^d$. הראה כי $|T_K(u)|>1$ אםם h_K אינה גזירה ב־ u.

ג. הוכח כי המידה של הקבוצה $\{u : |T_K(u)|>1\}$ הינה אפס.

15. תהא $\mathcal{K}=\{K_1,\dots,K_n\}$ משפחה של קבוצות קמורות ב־ $\mathbb{R}^d$. הוכח כי קיימת משפחה $\mathcal{K}'=\{K_1',\dots,K_n'\}$ של קבוצות קמורות קומפקטיות ב־ $\mathbb{R}^d$ כך ש־ $N(\mathcal{K})=N(\mathcal{K}')$.

16. היפרגרף $\mathcal{F}$ נקרא <u>אנטי־שרשרת</u> אם $F\not\subset F'$ לכל $F\ne F'$ ב־ $\mathcal{F}$.
יהא $\mathcal{F}\subset 2^{[n]}$ אנטי־שרשרת.
א. הוכח כי $\sum_{F\in\mathcal{F}}\binom{n}{|F|}^{-1}\le 1$.
ב. הסק כי $|\mathcal{F}|\le\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$. מהם מקרי השויון?

17. יהא $\mathcal{F}$ היפרגרף r־אחיד (כלומר $\mathcal{F} \subset \binom{V}{r}$) המקיים לכל $F \in \mathcal{F}$

$$\tau(\mathcal{F} - \{F\}) < \tau(\mathcal{F}) = s \quad .$$

הוכח: $|\mathcal{F}| \le \binom{r+s-1}{r}$.

18. יהא X קומפלקס סימפליציאלי. הוכח כי X הינו d־מטיט אם ורק אם קיימת סדרת d־מטוטים אלמנטריים

$$X = X_0 \xrightarrow{[\sigma_0,\tau_0]} X_1 \xrightarrow{[\sigma_1,\tau_1]} X_2 \to \cdots \to X_{t-1} \xrightarrow{[\sigma_{t-1},\tau_{t-1}]} X_t$$

כך ש־ $|\sigma_i| = d$ לכל $0 \le i \le t-1$, וכך ש־ $\dim X_t \le d-2$.

19. יהיו $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_{d+1}$ משפחות של קבוצות קמורות ב־ $\mathbb{R}^d$ ונניח כי

$$|\{(K_1, \ldots, K_{d+1}) \in \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_{d+1} : \bigcap_{i=1}^{d+1} K_i \neq \emptyset\}| \ge \alpha \prod_{i=1}^{d+1} |\mathcal{K}_i|.$$

הוכח כי קיים $1 \le i \le d+1$ ותת־משפחה $\mathcal{K}_i' \subset \mathcal{K}_i$ שגודלה $|\mathcal{K}_i'| \ge \frac{\alpha}{d+1}|\mathcal{K}_i|$ המקיימת $\cap_{K \in \mathcal{K}_i'} K \neq \emptyset$.
<u>הדרכה:</u> השתמש ב d־מטיטות של העצב של $\cup_{i=1}^{d+1}\mathcal{K}_i$.

20. חשב את $H_i(\Delta_{n-1}^{(k)}; \mathbb{F})$ לכל $0 \le i \le k \le n-1$.

21. יהא $\mathbb{F}$ שדה קבוע. לקומפלקס סימפליציאלי X נסמן $\beta_k(X) = \beta_k(X;\mathbb{F}) = \dim H_k(X;\mathbb{F})$.
א. יהא $k \ge 2$ ויהא X $\Delta_{n-1}^{(k-1)} \subset X \subset \Delta_{n-1}^{(k)}$ קומפלקס סיפליציאלי. הוכח כי

$$\beta_k(X) - \beta_{k-1}(X) = f_k(X) - \binom{n-1}{k}.$$

ב. הסק כי אם $X \subset \Delta_{n-1}^{(k)}$ קומפלקס סיפליציאלי המקיים $\beta_k(X) = 0$, אזי $f_k(X) \le \binom{n-1}{k}$.

22. היפרגרף $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ נקרא k־יער אם לכל $F \in \mathcal{F}$ קיימת חלוקה $[n] = \cup_{i=1}^{k} V_i(F)$ כך ש: $|F \cap V_i(F)| = 1$ לכל $1 \le i \le k$, אך לכל $F \neq F' \in \mathcal{F}$ קיים $1 \le i \le k$ כך ש־ $|F' \cap V_i(F)| \neq 1$. (שים לב כי 2־יער הוא יער במובן הגרפי הרגיל).
הוכח כי אם $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ הוא k־יער אזי $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k-1}$.
<u>הדרכה:</u> יהא X הקומפלקס ה־ $(k-1)$־מימדי שקבוצת הסימפלקסים המקסימליים שלו היא $\mathcal{F}$. הראה כי $H_{k-1}(X) = 0$.

23. יהא p מספר ראשוני ויהא $\mathbb{F}_p$ השדה עם p איברים.
א. תהא $A \in M_{k \times \ell}(\mathbb{Z})$ מטריצה של מספרים שלמים מסדר $k \times \ell$. לכל שדה $\mathbb{F}$ נעיין בההעתקה הלינארית $T_{\mathbb{F}} : \mathbb{F}^\ell \to \mathbb{F}^k$ הנתונה ע"י $T_{\mathbb{F}} v = Av$. הוכח כי

$$\dim_{\mathbb{Q}} \ker T_{\mathbb{Q}} \le \dim_{\mathbb{F}_p} \ker T_{\mathbb{F}_p}.$$

ב. הוכח כי לכל קומפלקס סימפליציאלי X ולכל k:

$$\beta_k(X;\mathbb{Q}) \le \beta_k(X;\mathbb{F}_p).$$

24. קומפלקס הדגלים של גרף $G=(V,E)$ הוא הקומפלקס הסימפליציאלי $X(G)$ שקבוצת קודקדיו היא V ושהסימפלקסים שלו הם $\sigma\subset V$ כך ש־ σ הוא תת־גרף שלם של G.

א. יהא $v\in V$. נסמן ב־ $\Gamma_G(v)$ את שכני v ב־ G. הראה שקיימת סדרה מדוייקת

$$\cdots \to H_k(X(G-v) \to H_k(X(G)) \to H_{k-1}(X(\Gamma_G(v)) \to \cdots$$

ב. הוכח כי אם $H_k(X(G))\neq 0$ אזי $f_0(X(G))=|V|\ge 2k+2$.

ג. מצא גרף G על $2k+2$ קדקדים המקיים $H_k(X(G))\neq 0$.

25. קומפלקס הקבוצות הבלתי־תלויות של גרף $G=(V,E)$ הוא הקומפלקס הסימפליציאלי $I(G)$ שקבוצת קודקדיו היא V ושהסימפלקסים שלו הם $\sigma\subset V$ כך ש־ σ קבוצה בלתי תלויה ב־ G, כלומר $\binom{\sigma}{2}\cap E=\emptyset$. במילים אחרות: $I(G)=X(\overline{G})$.

א. תהא P_n המסילה על n קדקדים. חשב את $H_*(I(P_n))$.

ב. יהא C_n המעגל על n קדקדים. חשב את $H_*(I(C_n))$.

הדרכה: העזר בסדרה המדוייקת שבתרגיל הקודם.

26. תהא $(P,\le)$ קבוצה סדורה חלקית.

א. הראה כי קיימת פונקציה יחידה $\mu: P\times P\to\mathbb{Z}$ המקיימת:

$$\begin{aligned}
&\mu(x,y)=0 && x\not\le y\\
&\mu(x,x)=1\\
&\textstyle\sum_{x\le y\le z}\mu(x,y)=0 && x\le z.
\end{aligned}$$

μ זו נקראית פונקצית Möbius של P.

ב. חשב את μ עבור שריג תת הקבוצות של $\{1,\ldots,n\}$.

ג. חשב את μ עבור שריג המחלקים של מספר טבעי n עם יחס הסדר $x\prec y$ אםם x מחלק את y.

ד. תהא $f:P\to\mathbb{R}$. נגדיר $g:P\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$g(x)=\sum_{y\le x} f(y).$$

הוכח את נוסחת ההיפוך של Möbius:

$$f(x)=\sum_{y\le x}\mu(y,x)g(y).$$

27. <u>קומפלקס השרשרות</u> $\Delta(P)$ של קבוצה סדורה חלקית $(P, \leq)$ הוא הקומפלקס הסימפליציאלי על קבוצת הקודקדים P, שהסימפלקסים שלו הם שרשרות $\sigma = \{x_0 < \cdots < x_p\}$.
ל- $x < y \in P$ נסמן $P(x,y) = \{z \in P : x < z < y\}$.
הוכח:

$$\mu(x,y) = \tilde{\chi}(\Delta(P(x,y))) = \sum_k (-1)^k \dim \tilde{H}_k(\Delta(P(x,y))).$$