שיטות אלגבריות בקומבינטוריקה ־ תרגילים

1. תהא $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$ משפחת קבוצות המקיימת $|A|$ אי־זוגי וכן $|A \cap A'|$ זוגי לכל $A \neq A' \in \mathcal{A}$. הוכח כי $|\mathcal{A}| \leq n$. מצא דוגמא ל־ $\mathcal{A}$ כזו המקיימת $|\mathcal{A}| = n$.

2. תהא $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$ משפחת קבוצות המקיימת $|A \cap A'|$ זוגי לכל $A, A' \in \mathcal{A}$.

2.1 הוכח כי $|\mathcal{A}| \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

2.2 הוכח כי קיימת משפחה $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ המקיימת $|\mathcal{B}| = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, כך ש־ $|B \cap B'|$ זוגי לכל $B, B' \in \mathcal{B}$.

3. 3.1 יהיו $A_1, \ldots, A_m \subset [n]$ שונות המקיימות: λ < $|A_i| = k_i$ לכל $1 \leq i \leq m$ ו־ $|A_i \cap A_j| = \lambda > 0$ לכל $1 \leq i < j \leq m$. יהיו $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ הוקטורים המציינים של $A_1, \ldots, A_m$ ותהא $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ המטריצה ששורותיה $v_1, \ldots, v_m$. הראה כי

$$\det MM^t = (1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda}{k_i - \lambda}) \prod_{i=1}^{m} (k_i - \lambda) \quad .$$

הסק מכך את א"ש Fisher: $m \leq n$.

3.2 הראה כי המקרה $\lambda = 1$ של א"ש Fisher שקול למשפט Erdos − deBruijn.

4. תהא $A \subset \mathbb{R}^n$ כך ש־ $|a - b| = 1$ לכל $a \neq b \in A$. הוכח (ע"י שקול דומה להוכחת משפט Erdos − deBruijn) כי $|A| \leq n + 1$.
תן דוגמא לקבוצה A כנ"ל עבורה מתקיים שיוון $|A| = n + 1$.

5. 5.1 יהא m זוגי ותהא $A \in M_m(\mathbb{R})$ המקיימת $a_{ii} = 0$ ו־ $a_{ij} \in \{\pm 1\}$ עבור $i \neq j$. הוכח כי A לא־סינגולרית מעל $\mathbb{R}$.

5.2 יהא q חזקת ראשוני. תהא $A \in M_m(\mathbb{Z})$ כך ש־ a_{ij} מתחלק ב־ q אם"ם $i \neq j$. הוכח כי A לא־סינגולרית מעל $\mathbb{R}$.

6. תהא V קבוצה בגודל n ויהא $k < n$. תהא $\mathcal{B} \subset \binom{V}{k}$ המקיימת $|\{B \in \mathcal{B} : \{x, y\} \subset B\}| = \lambda$ לכל $x \neq y \in V$.

6.1 הוכח כי $|\mathcal{B}| \geq |V|$.

6.2 ל־ $x \in V$ נסמן $\deg(x) = |\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}|$. הראה כי $\deg(x) = \frac{\lambda(n-1)}{k-1}$ לכל $x \in V$.

6.3 הוכח כי אם $|\mathcal{B}| = |V|$ אזי $|B \cap B'| = \lambda$ לכל $B \neq B' \in \mathcal{B}$.

7. יהא q חזקת ראשוני.

7.1 יהיו $k \leq n$. הוכח כי מספר המטריצות $A \in M_{k \times n}(\mathbb{F}_q)$ שדרגתן k הינו $\prod_{j=0}^{k-1} (q^n - q^j)$.

7.2 הוכח כי מספר תתי המרחבים הלינאריים ה־ k־מימדיים של $\mathbb{F}_q^n$ הינו $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{q^n - q^j}{q^k - q^j}$. מהו מספר תתי המרחבים הפרוייקטיביים ה־ k־מימדיים של המרחב הפרוייקטיבי ה־ n־מימדי $P(\mathbb{F}_q^{n+1})$?

7.3 דוגמא לשיוויון בא"ש Fisher: יהא $N=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. מצא משפחה $H_1,\dots,H_N$ של תת־קבוצות של $[N]$ כך ש־ $|H_i|=\frac{q^n-1}{q-1}$ ו־ $|H_i\cap H_j|=\lambda=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$ לכל $1\le i<j\le N$.

8. בנייה של גרף $\mathrm{Hoffman-Singleton}$: יהא $G=(V,E)$ שקבוצת הקדקדיו היא החבורה החיבורית $V=\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_2$ וקבוצת צלעותיו היא $E=E_0\cup E_1\cup E_{01}$ כאשר

$$E_0=\{\{(h,j,0),(h,j+1,0)\}:h,j\in\mathbb{Z}_5\}$$

$$E_1=\{\{(i,j,1),(i,j+2,1)\}:i,j\in\mathbb{Z}_5\}$$

$$E_{01}=\{\{(h,j,0),(i,hi+j,1)\}:h,i,j\in\mathbb{Z}_5\}\ .$$

בדוק ש־ G הוא גרף Moore 7־רגולרי עם $g(G)=5$.

9. יהיו $A_1,\dots,A_m\subset[n]$ כך ש־

$$|\{|A_i-A_j\cup A_j-A_i|:1\le i<j\le m\}|=2\ .$$

9.1 הראה כי $m\le\frac{n(n+3)}{2}$.

9.2 שפר זאת ל־ $m\le 1+\frac{n(n+1)}{2}$.

10. יהא $g(d,q)$ המספר המקסימלי של וקטורים במצב לינרי כללי ב־ $\mathbb{F}_q^d$. הוכח:

10.1 $g(d,q)\ge q+1$ לכל $q,d\ge 2$.

10.2 $g(3,q)=q+1$ אם q אי־זוגי.

10.3 $g(3,q)=q+2$ אם q זוגי.

11. היפרגרף $\mathcal{F}\subset\binom{[n]}{k}$ נקרא k־יער אם לכל $F\in\mathcal{F}$ קיימת חלוקה $[n]=\cup_{i=1}^k V_i(F)$ כך ש: $|F\cap V_i(F)|=1$ לכל $1\le i\le k$, אך לכל $F\ne F'\in\mathcal{F}$ קיים $1\le i\le k$ כך ש־ $|F'\cap V_i(F)|\ne 1$. (שים לב כי 2־יער הוא יער במובן הגרפי הרגיל).
הוכח כי $|\mathcal{F}|\le\binom{n-1}{k-1}$.
<u>הדרכה</u>: הנח בהג"כ כי $n\in V_k(F)$ לכל $F\in\mathcal{F}$. התאם לכל $F\in\mathcal{F}$ פולינום ב־ $\mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_{n-1}]$.

12. <u>המימד</u> $d=\dim(G)$ של גרף $G=(V,E)$ הוא ה־ d המינימלי כך שקיימת העתקה $f=(f_1,\dots,f_d):V\to\mathbb{R}^d$ כך ש־ $\{u,v\}\in E$ אםם $f_i(u)\ne f_i(v)$ לכל $1\le i\le d$.
יהא nK_2 הגרף המורכב מ־ n צלעות זרות. הוכח: $\dim(nK_2)=\lceil\log_2(2n)\rceil$.
<u>הדרכה</u>: בהנתן f כנ"ל, הגדר $2n$ פולינומים מולטילינאריים בת"ל ב־ $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$.

13. תהא $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ גיאומטרית חילה לא־מנוונת, כלומר קבוצת הנקודות אינה מוכלת באיחוד של שני ישרים. הוכח:

13.1 אם כל שני ישרים נחתכים אזי $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ היא מישור פרוייקטיבי מסדר n עבור n כלשהוא. כלומר $|\mathcal{P}|=|\mathcal{L}|=n^2+n+1$, $|L|=n+1$ לכל $L\in\mathcal{L}$ וכל נקודה נמצאית על $n+1$ ישרים.

13.2 אם $|\mathcal{P}|=|\mathcal{L}|$ אזי $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ היא מישור פרוייקטיבי.
<u>הדרכה</u>: העזר בהוכחה של Conway למשפט Erdos־de Brujin.

14. הראה כי קיים קבוע C_1 כך שאם $G=(V,E)$ גרף עם $|V|=n$ קדקדים שאינו מכיל מעגל באורך 4 כתת־גרף, אזי $|E|\le C_1 n^{3/2}$.
<u>הדרכה</u>: הראה כי

$$\sum_{v\in V}\binom{\deg(v)}{2}\le\binom{n}{2}\,.$$

15. הראה כי קיים קבוע $C_2>0$ כך שלכל n קיים גרף $G=(V,E)$ עם $|V|=n$ קדקדים ו־ $|E|\ge C_2 n^{3/2}$ צלעות שאינו מכיל מעגל באורך 4 כתת־גרף.
<u>הדרכה</u>: הראה זו תחילה ל־ n ־ים מהצורה $n=2(p^2+p+1)$ ע"י שמוש במישור הפרוייקטיבי מסדר p.

16. הוכח את הגרסא הבאה של משפט $Chevalley-Warning$:
יהיו $f_1(x),\dots,f_k(x)\in\mathbb{F}_q[x_1,\dots,x_n]$ המקיימים $\sum_{i=1}^k\deg f_i(x)<n$, ותהא

$$S=\{u\in\mathbb{F}_q^n : f_1(u)=\dots=f_k(u)=0\}\,.$$

אזי $|S|\equiv 0 (mod\, p)$.
<u>הדרכה</u>: עקוב אחרי ההוכחה שנתנו בכיתה לגרסא החלשה של המשפט והחלף את $g(x)$ ע"י:

$$g(x)=\sum_{u\in S}\prod_{i=1}^n(1-(x_i-u_i)^{q-1})$$

17. יהא q חזקת ראשוני. נראה את השדה $\mathbb{F}_q$ כתת שדה של $\mathbb{F}_{q^2}$.
תהא $\varphi: PG(2,q)\to PG(2,q^2)$ ההעתקה הנתונה ע"י

$$\varphi(\mathrm{span}_{\mathbb{F}_q}\{(a,b,c)\})=\mathrm{span}_{\mathbb{F}_{q^2}}\{(a,b,c)\}$$

לכל $0\ne(a,b,c)\in\mathbb{F}_q^3$. תהא $B=\varphi(PG(2,q))$.

17.1 הוכח כי B אינה מכילה ישר של $PG(2,\mathbb{F}_{q^2})$.

17.2 הוכח כי B חותכת כל ישר של $PG(2,\mathbb{F}_{q^2})$.

18. יהא $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ מישור פרוייקטיבי מסדר n. תהא $A \subset P$ קבוצה שאינה מכילה ישר אך חותכת כל ישר. הוכח כי $|A| \geq n+\sqrt{n}+1$.
<u>הדרכה</u>: נסמן $\mathcal{L}=\{L_1,\ldots,L_{n^2+n+1}\}$ ויהא $k_i=|L_i \cap A|$.
אם קיים i עבורו $k_i \geq \sqrt{n}+1$ אזי הטענה קלה.
אחרת התבונן בביטוי

$$\sum_{i=1}^{n^2+n+1}(k_i-1)(k_i-\sqrt{n}-1) \ .$$

19. תהא

$$\mathcal{P}=\{[x_0,\ldots,x_4] \in PG(4,p) : \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 0\} \ .$$

תהא $\mathcal{L}$ קבוצת כל הישרים L של $PG(4,p)$ המוכלים ב־ $\mathcal{P}$. הוכח:

19.1 $\mathcal{P}$ אינה מכילה מישור של $PG(4,p)$.

19.2 דרך כל נקודה ב־ $\mathcal{P}$ עוברים בדיוק $p+1$ ישרים ב־ $\mathcal{L}$.

19.3 $|\mathcal{P}|=|\mathcal{L}|=p^3+p^2+p+1$.

19.4 יהא G הגרף הדו־צדדי שצדדיו הם $\mathcal{P}$ ו־ $\mathcal{L}$, ו־ $\{P,L\}$ היא צלע אסם $P \in L$. הוכח כי G אינו מכיל מעגלים באורך 4 או 6.