# קומבינטוריקה של קבוצות קמורות - תרגילים

1. תהא $A \subset \mathbb{R}^d$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
   א. אם $A$ סגורה אזי גם $\mathrm{conv}(A)$ סגורה.
   ב. אם $A$ קומפקטית אזי גם $\mathrm{conv}(A)$ קומפקטית.

2. מצא באופן מפורש $d+1$ נקודות $v_1, \dots, v_{d+1} \in \mathbb{R}^d$ המקיימות $|v_i - v_j| = 1$ לכל $1 \le i < j \le d+1$.

3. יהיו $K_1, \dots, K_n$ תיבות מקבילות לצירים ב־ $\mathbb{R}^d$.
   הוכח כי אם כל שתיים מביניהן נחתכות, אזי כולן נחתכות.

4. יהיו $K, K_1, \dots, K_n$ קבוצות קמורות ב־ $\mathbb{R}^d$. נתון כי לכל $I \subset [n]$ המקיימת $|I| \le d+1$, קיימת הזזה $x+K$ של $K$ החותכת את $K_i$ לכל $i \in I$.
   הוכח כי קיימת הזזה $y+K$ החותכת את $K_i$ לכל $1 \le i \le n$.

5. תהא $K$ קמורה ב־ $\mathbb{R}^d$, ויהיו $D_1, \dots, D_m$ חצאי־מרחב סגורים ב־ $\mathbb{R}^d$ המקיימים $K \subset \cup_{i=1}^m D_i$. הוכח כי קיימת $I \subset [m]$ המקימת $|I| \le d+1$ כך ש־ $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$.

6. תהא $A \subset \mathbb{R}^d$ קומפקטית. נאמר כי הנקודה $a \in A$ רואה את הנקודה $b \in A$ אם הקטע הסגור $[a,b]$ מוכל ב־ $A$.
   נתון כי לכל $d+1$ נקודות $b_1, \dots, b_{d+1} \in A$ קיימת $a \in A$ הרואה את כולן.
   הוכח כי $A$ קבוצה כוכבית, כלומר קיימת $x \in A$ הרואה את כל נקודות $A$.

7. תהא $\mathcal{F}$ משפחה סופית של קבוצות, כך ש־ $|F| \le d$ לכל $F \in \mathcal{F}$.
   א. הוכח כי אם $\cap_{i=1}^{d+1} F_i \neq \emptyset$ לכל $F_1, \dots, F_{d+1} \in \mathcal{F}$, אזי $\cap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.
   ב. הוכח כי אם $\cap_{i=1}^{k} F_i \neq \emptyset$ לכל $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$, אזי $\tau(\mathcal{F}) \le \frac{d-1}{k-1} + 1$.

8. יהא $T = (V, E)$ עץ, ויהיו $T_1 = (V_1, E_1), \dots, T_n = (V_n, E_n)$ תתי־עצים של $T$ המקיימים $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ לכל $1 \le i < j \le n$. הוכח כי $\cap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$.

9. תהא $K$ קבוצה קמורה סגורה שאינה חסומה. הוכח כי $K$ מכילה קרן, כלומר קבוצה מהצורה $\{a + tb : t \ge 0\}$ כאשר $a, 0 \neq b \in \mathbb{R}^n$.

10. יהיו $K_1, \dots, K_m$ קטעים סגורים במישור שכולם מקבילים לציר ה־ $y$. נניח שלכל $I \subset [m]$ המקיימת $|I| \le d+2$, קיים פולינום $p(x)$ ממעלה לכל היותר $d$ שהגרף שלו חותך את $K_i$ לכל $i \in I$. הוכח כי קיים פולינום $p(x)$ ממעלה לכל היותר $d$ שהגרף שלו חותך את $K_i$ לכל $1 \le i \le m$.

11. תהיינה $A_1, \dots, A_{(m-1)n+1}$ תת־קבוצות לא ריקות של $[n]$.
    הוכח כי קיימות $m$ קבוצות זרות לא־ריקות $I_1, \dots, I_m \subset [(m-1)n+1]$ כך שמתקיים

$$\bigcup_{i \in I_1} A_i = \cdots = \bigcup_{i \in I_m} A_i \quad .$$

    תן דוגמא למשפחה של $(m-1)n$ קבוצות כנ"ל שעבורן אין חלוקה כנ"ל.

12. תהא $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה קמורה. פונקציה $f : A \to \mathbb{R}$ נקראית קמורה אם

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

לכל $x, y \in A$ ו־ $0 \leq \lambda \leq 1$.
נסמן ב־ $E_f$ את קבוצת הנקודות ב־ $A$ אשר בהן $f$ אינה גזירה.

א. תהא $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ קמורה. הוכח כי $E_f$ היא בת־מנייה.

ב. תהא $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה קמורה ותהא $f : A \to \mathbb{R}$ קמורה.
הוכח כי אם $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ קיים לכל $1 \leq i \leq n$, אזי $f$ גזירה ב־ $a$.

ג. הוכח כי אם $f$ קמורה על $\mathbb{R}^n$ אזי $E_f$ היא קבוצה בעלת מידה אפס.

13. תהא $K$ קבוצה קמורה קומפקטית ב־ $\mathbb{R}^d$. פונקצית התומך של $K$

$$h_K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

מוגדרת ע"י:

$$h_K(u) = \max\{x \cdot u : x \in K\} \quad .$$

לכל $u \in \mathbb{R}^d$ נסמן

$$T_K(u) = \{x \in K : x \cdot u = h_K(u)\} \ .$$

א. הראה כי $h_K$ היא פונקציה קמורה.

ב. יהא $0 \neq u \in \mathbb{R}^d$. הראה כי $|T_K(u)| > 1$ אםם $h_K$ אינה גזירה ב־ $u$.

ג. הוכח כי המידה של הקבוצה $\{u : |T_K(u)| > 1\}$ הינה אפס.

14. תהא $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_n\}$ משפחה של קבוצות קמורות ב־ $\mathbb{R}^d$. הוכח כי קיימת משפחה $\mathcal{K}' = \{K_1', \ldots, K_n'\}$ של קבוצות קמורות קומפקטיות ב־ $\mathbb{R}^d$ כך ש־ $N(\mathcal{K}) = N(\mathcal{K}')$.

15. היפרגרף $\mathcal{F}$ נקרא אנטי־שרשרת אם $F \not\subset F'$ לכל $F \neq F'$ ב־ $\mathcal{F}$.
יהא $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ אנטי־שרשרת.
א. הוכח כי $\sum_{F \in \mathcal{F}} \binom{n}{|F|}^{-1} \leq 1$.
ב. הסק כי $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. מהם מקרי השויון?

16. יהא $\mathcal{F}$ היפרגרף $r$־אחיד (כלומר $\mathcal{F} \subset \binom{V}{r}$) המקיים לכל $F \in \mathcal{F}$

$$\tau(\mathcal{F} - \{F\}) < \tau(\mathcal{F}) = s \quad .$$

הוכח: $|\mathcal{F}| \leq \binom{r+s-1}{r}$.

17. הוכח את הגרסא החרוטית של משפט קרתיאודורי הססגוני:
אם $A_1,\dots,A_d$ קבוצות סופיות ב־ $\mathbb{R}^d$ כך ש־ $p\in\cap_{i=1}^d pos(A_i)$ ,
אזי קיימות $a_1\in A_1,\dots,a_d\in A_d$ כך ש־ $p\in pos\{a_1,\dots,a_d\}$.

18. יהא $X$ קומפלקס סימפליציאלי. הוכח כי $X$ הינו $d$־מטיט אם ורק אם קיימת סדרת $d$־מטוטים אלמנטריים

$$X=X_0\xrightarrow{[\sigma_0,\tau_0]}X_1\xrightarrow{[\sigma_1,\tau_1]}X_2\to\cdots\to X_{t-1}\xrightarrow{[\sigma_{t-1},\tau_{t-1}]}X_t$$

כך ש־ $|\sigma_i|=d$ לכל $0\le i\le t-1$ , וכך ש־ $\dim X_t\le d-2$.

19. יהיו $\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_{d+1}$ משפחות של קבוצות קמורות ב־ $\mathbb{R}^d$ ונניח כי

$$|\{(K_1,\dots,K_{d+1})\in\mathcal{K}_1\times\cdots\times\mathcal{K}_{d+1}:\bigcap_{i=1}^{d+1}K_i\neq\emptyset\}|\geq\alpha\prod_{i=1}^{d+1}|\mathcal{K}_i|.$$

הוכח כי קיים $1\le i\le d+1$ ותת־משפחה $\mathcal{K}_i'\subset\mathcal{K}_i$ שגודלה $|\mathcal{K}_i'|\geq\frac{\alpha}{d+1}|\mathcal{K}_i|$ המקיימת $\cap_{K\in\mathcal{K}_i'}K\neq\emptyset$.
<u>הדרכה:</u> השתמש ב $d$־מטיטות של העצב של $\cup_{i=1}^{d+1}\mathcal{K}_i$.

20. חשב את $H_i(\Delta_{n-1}^{(k)};\mathbb{F})$ לכל $0\le i\le k\le n-1$.

21. יהא $\mathbb{F}$ שדה קבוע. לקומפלקס סימפליציאלי $X$ נסמן $\beta_k(X)=\beta_k(X;\mathbb{F})=\dim H_k(X;\mathbb{F})$.
א. יהא $k\geq 2$ ויהא $X$ $\Delta_{n-1}^{(k-1)}\subset X\subset\Delta_{n-1}^{(k)}$ קומפלקס סיפליציאלי. הוכח כי

$$\beta_k(X)-\beta_{k-1}(X)=f_k(X)-\binom{n-1}{k}.$$

ב. הסק כי אם $X\subset\Delta_{n-1}^{(k)}$ קומפלקס סיפליציאלי המקיים $\beta_k(X)=0$, אזי $f_k(X)\le\binom{n-1}{k}$.

22. היפרגרף $\mathcal{F}\subset\binom{[n]}{k}$ נקרא $k$־יער אם לכל $F\in\mathcal{F}$ קיימת חלוקה $[n]=\cup_{i=1}^k V_i(F)$ כך ש: $|F\cap V_i(F)|=1$ לכל $1\le i\le k$, אך לכל $F\neq F'\in\mathcal{F}$ קיים $1\le i\le k$ כך ש־ $|F'\cap V_i(F)|\neq 1$. (שים לב כי 2־יער הוא יער במובן הגרפי הרגיל).
הוכח כי אם $\mathcal{F}\subset\binom{[n]}{k}$ הוא $k$־יער אזי $|\mathcal{F}|\le\binom{n-1}{k-1}$.
<u>הדרכה:</u> יהא $X$ הקומפלקס ה־ $(k-1)$־מימדי שקבוצת הסימפלקסים המקסימליים שלו היא $\mathcal{F}$. הראה כי $H_{k-1}(X)=0$.

23. יהא $p$ מספר ראשוני ויהא $\mathbb{F}_p$ השדה עם $p$ איברים.
א. תהא $A\in M_{k\times\ell}(\mathbb{Z})$ מטריצה של מספרים שלמים מסדר $k\times\ell$. לכל שדה $\mathbb{F}$ נעיין בהעתקה הלינארית $T_{\mathbb{F}}:\mathbb{F}^\ell\to\mathbb{F}^k$ הנתונה ע"י $T_{\mathbb{F}}v=Av$. הוכח כי

$$\dim_{\mathbb{Q}}\ker T_{\mathbb{Q}}\le\dim_{\mathbb{F}_p}\ker T_{\mathbb{F}_p}.$$

ב. הוכח כי לכל קומפלקס סימפליציאלי $X$ ולכל $k$:

$$\beta_k(X;\mathbb{Q})\le\beta_k(X;\mathbb{F}_p).$$

24. <u>קומפלקס הדגלים</u> של גרף $G = (V, E)$ הוא הקומפלקס הסימפליציאלי $X(G)$ שקבוצת קודקדיו היא $V$ ושהסימפלקסים שלו הם $\sigma \subset V$ כך ש־ $\sigma$ הוא תת־גרף שלם של $G$.

א. יהא $v \in V$. נסמן ב־ $\Gamma_G(v)$ את שכני $v$ ב־ $G$. הראה שקיימת סדרה מדוייקת

$$\cdots \to H_k(X(G - v) \to H_k(X(G)) \to H_{k-1}(X(\Gamma_G(v)) \to \cdots$$

ב. הוכח כי אם $H_k(X(G)) \neq 0$ אזי $f_0(X(G)) = |V| \geq 2k + 2$.

ג. מצא גרף $G$ על $2k + 2$ קדקדים המקיים $H_k(X(G)) \neq 0$.

25. <u>קומפלקס הקבוצות הבלתי־תלויות</u> של גרף $G = (V, E)$ הוא הקומפלקס הסימפליציאלי $I(G)$ שקבוצת קודקדיו היא $V$ ושהסימפלקסים שלו הם $\sigma \subset V$ כך ש־ $\sigma$ קבוצה בלתי תלויה ב־ $G$, כלומר $\binom{\sigma}{2} \cap E = \emptyset$. במילים אחרות: $I(G) = X(\overline{G})$.

א. תהא $P_n$ המסילה על $n$ קדקדים. חשב את $H_*(I(P_n))$.

ב. יהא $C_n$ המעגל על $n$ קדקדים. חשב את $H_*(I(C_n))$.

<u>הדרכה</u>: העזר בסדרה המדוייקת שבתרגיל הקודם.

26. תהא $(P, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית.

א. הראה כי קיימת פונקציה יחידה $\mu : P \times P \to \mathbb{Z}$ המקיימת:

$$\begin{array}{ll} \mu(x,y) = 0 & x \not\leq y \\ \mu(x,x) = 1 & \\ \sum_{x \leq y \leq z} \mu(x,y) = 0 & x \leq z. \end{array}$$

$\mu$ זו נקראית <u>פונקצית Möbius</u> של $P$.

ב. חשב את $\mu$ עבור שריג תת הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$.

ג. חשב את $\mu$ עבור שריג המחלקים של מספר טבעי $n$ עם יחס הסדר $x \prec y$ אםם $x$ מחלק את $y$.

ד. תהא $f : P \to \mathbb{R}$. נגדיר $g : P \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y).$$

הוכח את נוסחת ההיפוך של Möbius:

$$f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y,x) g(y).$$

27. <u>קומפלקס השרשרות</u> $\Delta(P)$ של קבוצה סדורה חלקית $(P, \leq)$ הוא הקומפלקס הסימפליציאלי על קבוצת הקודקדים $P$, שהסימפלקסים שלו הם שרשרות $\sigma = \{x_0 < \cdots < x_p\}$.

ל־ $x < y \in P$ נסמן $P(x,y) = \{z \in P : x < z < y\}$.

הוכח:

$$\mu(x,y) = \tilde{\chi}(\Delta(P(x,y))) = \sum_k (-1)^k \dim \tilde{H}_k(\Delta(P(x,y))).$$

28. א. הוכח את הגרסא הבאה של משפט בורסוק: לכל העתקה רציפה $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ קיימת $x \in S^d$ עבורה $f(x) = f(-x)$.

ב. יהיו $A = \{a_1, \ldots, a_{d+1}\}, B = \{b_1, \ldots, b_{d+1}\} \subset \mathbb{R}^d$.
הוכח כי קיימת חלוקה $[d+1] = I \cup J$ עבורה:

$$\operatorname{conv}(\{a_i\}_{i\in I} \cup \{b_j\}_{j\in J}) \cap \operatorname{conv}(\{a_j\}_{j\in J} \cup \{b_i\}_{i\in I}) \neq \emptyset$$

<u>הדרכה</u>: הגדר העתקה מתאימה מ־ $S^d$ ל־ $\mathbb{R}^d$ והעזר בסעיף א.