

בוּחַן בַּמְבּוּא לַהִסְתַּבְרוּת ח' 104034 - 31.12.2008

מס' סטודנט: _____

משך הבחינה שעתיים. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. במבחן זה 8 שאלות (10 סעיפים) ב-2 עמודים. משקלו של כל סעיף 10 נקודות. יש לענות על כל השאלות על ידי סימון X במשבצת המתאימה. יש לכתוב **בעט בלבד**. שאלות עם יותר מתשובה אחת מסומנת תיפסלנה. בתום המבחן יש להחזיר את דף השער ואת דף זה בלבד.
בהצלחה!

פונקצית התפלגות נורמלית (גאוסית) תקנית:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|
| x | .10 | .20 | .30 | .40 | .50 | .60 | .70 | .80 | .90 | 1.0 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2.0 |
| $\Phi(x)$ | .54 | .58 | .62 | .66 | .69 | .73 | .76 | .79 | .82 | .84 | .89 | .93 | .96 | .98 |

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ פונקצית צפיפות נורמלית (גאוסית) תקנית:

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$: $\lambda > 0$ פונקצית צפיפות מעריכית (אקספוננציאלית) עם פרמטר

$p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$: $\lambda > 0$ פונקצית הסתברות פואסונית עם פרמטר

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ תזכורת: לכל שני משתנים מקריים X, Y מתקיים

תשובות:

| ה | ד | ג | ב | א | |
|---|---|---|---|---|----------|
| | | | | | שאלה 5.1 |
| | | | | | שאלה 5.2 |
| | | | | | שאלה 6 |
| | | | | | שאלה 7 |
| | | | | | שאלה 8 |

| ה | ד | ג | ב | א | |
|---|---|---|---|---|----------|
| | | | | | שאלה 1 |
| | | | | | שאלה 2 |
| | | | | | שאלה 3 |
| | | | | | שאלה 4.1 |
| | | | | | שאלה 4.2 |

| | |
|--|------|
| | ציון |
|--|------|

שתי השאלות הראשונות מבוססות על תרגילי הבית

1. עובד מתקשר לחברתו פעם אחת מידי יום בזמן העבודה. אורך כל שיחה הינו משתנה מקרי מעריכי עם תוחלת 5 דקות. יום אחד המנהלת מבהירה לו ששיחות ממושכות לא מקובלות עליה: בפעמים הראשונה והשניה שידבר יותר מ-10 דקות היא תסלח לו, אבל בפעם השלישית יפוטר. מהי תוחלת מספר הימים שנתרו לעובד במשרה?

- (א) $e^2 + e^3$ (ב) $3e^3$ (ג) $2e^2$ (ד) $3e^2$ (ה) $2e^3$

2. בכד יש שישה כדורים שונים המסומנים במספרים 1 עד 6. נחזור שוב ושוב על הניסוי הבא: נוציא כדור מקרי מהכד, נרשום את מספרו ונחזירו לכד. נסמן ב- X את מספר הניסויים שנבצע עד (כולל) הפעם הראשונה בה הופיעו ברשימה שלשה מספרים שונים. התוחלת של X שווה ל:

- (א) 3 (ב) 3.7 (ג) 4 (ד) 4.5 (ה) 6

3. שני צדדיו של מטבע יסומנו ב- H וב- T . נתונים שלושה מטבעות וידוע כי שניים מהם הוגנים (כלומר $P(H) = \frac{1}{2}$), ואילו המטבע הנותר הינו מוטה ומקיים $P(H) = \frac{2}{3}$. לא ידוע מיהו המטבע המוטה. מטילים את שלושה המטבעות. המטבע הראשון והמטבע השני מראים H , ואילו השלישי מראה T . מהי ההסתברות לכך שהמטבע הראשון הינו המטבע המוטה?

- (א) $\frac{3}{5}$ (ב) $\frac{1}{3}$ (ג) $\frac{2}{5}$ (ד) $\frac{2}{3}$ (ה) $\frac{1}{2}$

4. יהא X משתנה מקרי אשר פונקציית ההתפלגות שלו נתונה ע"י:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x^2+1}{5} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

4.1 יהיו D משתנה מקרי בדיד, C משתנה מקרי רציף, ו- $0 \leq \alpha \leq 1$ המקיימים

$$F_X(x) = \alpha F_D(x) + (1 - \alpha) F_C(x)$$

אזי $F_C(\frac{3}{2})$ שווה:

- (א) $\frac{3}{5}$ (ב) $\frac{1}{4}$ (ג) $\frac{2}{5}$ (ד) $\frac{1}{6}$ (ה) $\frac{5}{12}$

4.2 התוחלת של X היא:

- (א) $\frac{19}{15}$ (ב) $\frac{4}{3}$ (ג) $\frac{14}{25}$ (ד) $\frac{5}{3}$ (ה) $\frac{8}{5}$

5. לחברה ליצור עוגיות יש מלאי גדול מאוד ומעורבב היטב של צימוקים, מתוכם $\frac{3}{4}$ הם צימוקים בהירים ו- $\frac{1}{4}$ הם צימוקים כהים. החברה מייצרת עוגיות אשר התפלגות מספר הצימוקים בכל עוגיה היא פואסונית עם תוחלת 4.

5.1 מה ההסתברות לכך שעוגיה תכיל לפחות צימוק כהה אחד?

(א) $\frac{3}{4}(1 - e^{-1})$ (ב) $\frac{1}{4}$ (ג) $1 - e^{-1}$ (ד) $e^{-3/4}$ (ה) $1 - e^{-3}$

5.2 החברה החליטה לשפר את קו הייצור ע"י הוספת צימוק כהה אחד לכל עוגיה היוצאת מקו הייצור המקורי ללא צימוקים כהים. עוגיות המכילות צימוקים כהים נשארות ללא שינוי. מהי תוחלת מספר הצימוקים (הכולל) בעוגיות המיוצרות ע"י הקו המשופר?

(א) $5 - e^{-1}$ (ב) 4.3 (ג) $4 + e^{-2}$ (ד) $5 - \frac{3}{4}e^{-1}$ (ה) $4 + e^{-1}$

6. יהא X משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם פרמטר λ ויהא Y המשתנה המקרי הנתון ע"י $Y = e^X$. פונקציית הצפיפות של Y בנקודה $y > 1$ שווה ל:

(א) $\lambda y^{-\lambda-1}$ (ב) $\lambda y^{-1}e^{-\lambda y}$ (ג) $(1 - \lambda)y^{-\lambda}$ (ד) $\ln \lambda - \lambda y$ (ה) $\lambda e^{\lambda(-1-y)}$

7. בתהליך יצור של שבבים למחשב, הסיכוי לשבב פגום הוא 0.002 ללא תלות באחרים. משלוח של 2000 שבבים נבדק ע"י שני בקרי איכות שכל אחד מהם בדק 1000 שבבים שונים. שבב תקין ימצא תקין בודאות (אצל כל אחד מהבקרים). שבב פגום יאובחן כפגום בסיכוי 0.9 ע"י בקר א' ובסיכוי 0.6 ע"י בקר ב'. יהא X מספר השבבים שאובחנו כפגומים ע"י הבקרים. התוחלת של X שווה ל:

(א) 2.16 (ב) 2.4 (ג) 3 (ד) 3.21 (ה) 4

8. יהא X משתנה מקרי נורמלי תקני. נגדיר משתנה מקרי Y ע"י:

$$Y = \begin{cases} X & X < -1 & \text{אם} \\ 1 & -1 \leq X < 0 & \text{אם} \\ X^2 & 0 \leq X & \text{אם} \end{cases}$$

התוחלת של Y שווה ל:

(א) $-\sqrt{\frac{e}{2\pi}} + 0.5$ (ב) $\frac{-1}{\sqrt{2\pi e}} + 0.68$ (ג) $\frac{-e}{\sqrt{2\pi}} + 0.98$

(ד) $\frac{-1}{\sqrt{2\pi e}} + 0.84$ (ה) $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 1$