

## בחינה במבוא להסתברות ח' 104034 - 25.3.2009

מס' סטודנט: \_\_\_\_\_

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. במבחן זה 11 שאלות (13 סעיפים) ב- 3 עמודים. משקלו של כל סעיף 8 נקודות. יש לענות על כל השאלות על ידי סימון X במשבצת המתאימה. יש לכתוב **בעט בלבד**. שאלות עם יותר מתשובה אחת מסומנת תיפסלנה. בתום המבחן יש להחזיר את דף השער ואת דף זה בלבד.  
**בהצלחה!**

### פונקצית התפלגות נורמלית (גאוסית) תקנית:

|           |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |     |      |     |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|
| $x$       | .10 | .20 | .30 | .40 | .50 | .60 | .70 | .80 | .90 | 1.0 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2.0 |
| $\Phi(x)$ | .54 | .58 | .62 | .66 | .69 | .73 | .76 | .79 | .82 | .84 | .89  | .93 | .96  | .98 |

**פונק' צפיפות נורמלית (גאוסית)  $N(\mu, \sigma^2)$ :**  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

**פונק' הצפיפות של וקטור מקרי גאוזי  $(X, Y)$  עם תוחלות  $\mu_X = \mu_Y = 0$  ומטריצת קווריאנס  $W$ :**  
 $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det W}} e^{-\frac{1}{2}(x,y)W^{-1}(x,y)^t}$

**פונק' צפיפות מעריכית עם פרמטר  $\lambda$ :**  $\mu_X = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ ,  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$

**פונק' הסתברות פואסונית  $Pois(\lambda)$ :**  $\mu_X = \lambda$ ,  $\sigma_X^2 = \lambda$ ,  $P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

**פונק' הסתברות גיאומטרית  $Geo(p)$ :**  $\mu_X = \frac{1}{p}$ ,  $\sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$ ,  $P_X(k) = (1-p)^{k-1}p$ ,  $k = 1, 2, \dots$

### תשובות:

| ה | ד | ג | ב | א |          |
|---|---|---|---|---|----------|
|   |   |   |   |   | שאלה 7.1 |
|   |   |   |   |   | שאלה 7.2 |
|   |   |   |   |   | שאלה 8   |
|   |   |   |   |   | שאלה 9.1 |
|   |   |   |   |   | שאלה 9.2 |
|   |   |   |   |   | שאלה 10  |
|   |   |   |   |   | שאלה 11  |

| ה | ד | ג | ב | א |        |
|---|---|---|---|---|--------|
|   |   |   |   |   | שאלה 1 |
|   |   |   |   |   | שאלה 2 |
|   |   |   |   |   | שאלה 3 |
|   |   |   |   |   | שאלה 4 |
|   |   |   |   |   | שאלה 5 |
|   |   |   |   |   | שאלה 6 |

|  |      |
|--|------|
|  | ציון |
|--|------|

שלוש השאלות הראשונות מבוססות על תרגילי הבית

1. אברהם וברכה שותפים בקו טלפון (הניתן לשימוש בו זמנית ע"י שניהם). משך השימוש של אברהם בקו הוא משתנה מקרי  $X$  המתפלג מעריכית עם פרמטר  $\lambda > 0$ . משך השימוש של ברכה בקו הוא משתנה מקרי  $Y$  המתפלג מעריכית עם פרמטר  $2\lambda$ . נסמן ב- $Z = \frac{X}{X+Y}$  את החלק היחסי של הזמן בו אברהם השתמש בקו. פונקציית הצפיפות של  $Z$  בקטע  $0 \leq z \leq 1$  הינה:

(א)  $\frac{\log_2 e}{2-z}$       (ב)  $\frac{2(1+z)}{3}$       (ג)  $\frac{2}{(2-z)^2}$       (ד)  $\frac{16}{7(2-z)^3}$       (ה) 1

2. יהא  $X$  משתנה מקרי המקבל את הערכים 1, 2, 3 עם ההתפלגות

$$P(X=1) = \frac{1}{4}, \quad P(X=2) = \frac{1}{4}, \quad P(X=3) = \frac{1}{2}$$

- תהא  $X_1, X_2, X_3, \dots$  סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים כך שכל  $X_n$  מתפלג כמו  $X$ . נסמן ב- $N$  את ה- $n \geq 2$  המינימלי עבורו  $X_n \geq X_1$ . התוחלת  $E(N)$  שווה ל:

(א)  $\infty$       (ב)  $\frac{31}{12}$       (ג)  $\frac{17}{6}$       (ד)  $\log 3$       (ה)  $\frac{37}{12}$

3. במירוץ שליחים כל אצן רץ את קטע המסלול המיועד לו בזמן המתפלג מעריכית עם פרמטר  $\lambda$  ומוסר את המקל לאצן הבא אחריו. זמני הריצה של האצנים הינם בלתי תלויים. נסמן ב- $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$  את זמני החלפת המקל. החזאי הטוב ביותר של  $T_3$  באמצעות  $T_5$  הוא:

(א)  $T_5 - \frac{2}{\lambda}$       (ב)  $\frac{3}{5}T_5$       (ג)  $\frac{3}{\lambda}$       (ד)  $\frac{2}{5}T_5 - \frac{1}{\lambda}$       (ה)  $T_5^2$

4. יהיו  $A, B, C$  משתנים מקריים בלתי תלויים המפולגים אחיד בקטע  $[0, 1]$ . ההסתברות שלמשוואה הריבועית  $Ax^2 + 2Bx + C = 0$  יש שני שורשים ממשיים הינה:

(א)  $\frac{7}{9}$       (ב)  $\frac{1}{2}$       (ג)  $\frac{5}{9}$       (ד)  $\frac{3}{4}$       (ה)  $\frac{1}{12}$

5. אביחי ובתיה קולעים בחץ וקשת לאותה מטרה בו זמנית. ההסתברות שאביחי יקלע למטרה היא  $p_A = 0.7$ , וההסתברות שבתיה תקלע למטרה היא  $p_B = 0.4$ . נניח כי המאורעות הנ"ל בלתי תלויים. בהנחה שהמטרה נפגעה, ההסתברות שבתיה פגעה במטרה היא:

- (א) 0.28      (ב) 0.5      (ג)  $\frac{29}{77}$       (ד)  $\frac{25}{53}$       (ה)  $\frac{20}{41}$

6. מגרילים מספר שלם אי-שלילי  $N$  לפי התפלגות פואסונית עם פרמטר  $\lambda = 10$ . ערכו של  $N$  נמסר לאביעד ולבת-שבע, וכל אחד מהם בוחר באופן בלתי תלוי מספר מקרי ממשי בהתפלגות אחידה בקטע  $[0, N]$  (אם  $N = 0$  שניהם בהכרח בוחרים 0). יהא  $X$  המספר שנבחר ע"י אביעד, ו- $Y$  המספר שנבחר ע"י בת-שבע. הקווריאנס  $\text{cov}(X, Y)$  שווה ל:

- (א) 2.5      (ב) 0      (ג) 5      (ד) 10      (ה) -2

7. יהא  $n \geq 3$  מספר טבעי קבוע. בשלב הראשון מגרילים מספר  $K$  (לפי התפלגות לאו דווקא אחידה) מתוך  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ . נסמן כרגיל  $\mu_K = E(K)$ ,  $\sigma_K^2 = \text{Var}(K)$ . בשלב השני דוגמים מתוך  $\{1, 2, \dots, n\}$  מדגם מקרי  $S$  בגודל  $K$  ללא החזרה. (שים לב:  $S$  היא תת-קבוצה של  $\{1, \dots, n\}$  בגודל  $K$ ).

7.1 יהא  $X = |S \cap \{1, 2, 3\}|$  מספר האיברים מתוך  $\{1, 2, 3\}$  שעלו במדגם  $S$ . התוחלת המותנת  $E(X|K)$  הינה:

- (א)  $\frac{3\mu_K}{n}$       (ב)  $\frac{3K}{n}$       (ג)  $\frac{2\mu_K + \sigma_K^2}{n}$       (ד)  $\frac{K^2}{n^2}$       (ה)  $\frac{2K + \mu_K}{n}$

7.2 ההסתברות  $P(\{1, 2\} \subset S)$  שהמדגם  $S$  מכיל את  $\{1, 2\}$  הינה:

- (א)  $\frac{\sigma_K^2 + \mu_K^2}{n^2}$       (ב)  $\frac{\mu_K^2}{n^2}$       (ג)  $\frac{\mu_K}{n(n-1)}$

- (ד)  $\frac{\sigma_K^2 + \mu_K^2 - \mu_K}{n(n-1)}$       (ה)  $\frac{\mu_K(\mu_K - 1)}{n(n-1)}$

8. תהא  $(X, Y)$  נקודה מקרית הנבחרת בהסתברות אחידה בחצי העליון של עגול היחידה  
 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  , ויהא  $S = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

פונקציית הצפיפות של הוקטור המקרי  $(X, R)$  שווה בתחום  $|x| < r < 1$  ל:

(א)  $\frac{2}{\pi}$       (ב) 1      (ג)  $6x^2$       (ד)  $\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}$       (ה)  $\frac{2r}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}$

9. יהא  $(X, Y)$  וקטור מקרי גאוסי המקיים  $\text{cov}(X, Y) > 0$ , אשר פונקציית הצפיפות שלו הינה

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{6\pi} e^{-\frac{1}{18}(29x^2 - 2bxy + 17y^2)}$$

עבור קבוע  $b$  מתאים.

9.1 הקווריאנס  $\text{cov}(X, Y)$  שווה ל:

(א) 22      (ב) 20      (ג) 23      (ד) 19      (ה) 21

9.2 ההסתברות  $P(Y > X + \sqrt{2})$  שווה בקירוב ל:

(א) 0.11      (ב) 0.16      (ג) 0.31      (ד) 0.07      (ה) 0.42

10. הערך של הביטוי

$$4^{-4800} \sum_{k=3582}^{3612} \binom{4800}{k} 3^k$$

הוא (עפ"י משפט הגבול המרכזי) בקירוב:

(א) 0.95      (ב) 0.04      (ג) 0.26      (ד) 0.45      (ה) 0.39

11. מטילים 10 פעמים ובאופן בלתי תלוי מטבע מוטה עם  $P(H) = \frac{1}{4} = 1 - P(T)$

רצף הינו תת סדרה של הטלות עוקבות בעלות תוצאה זהה.

נסמן ב- $X$  את מספר הרצפים בחלוקה של סדרת עשר ההטלות לרצפים מקסימליים.

דוגמא:  $X(\underline{HH}T\underline{HTTT}HH) = X(\underline{HH}T\underline{HTTT}HH) = 5$

התוחלת  $E(X)$  שווה ל:

(א)  $\frac{35}{8}$       (ב) 4      (ג)  $\frac{81}{16}$       (ד)  $\frac{45}{8}$       (ה) 5.4