בחינה במבוא להסתברות ח' 104034 - 22.2.2009

מס' סטודנט: ____________________

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. במבחן זה 11 שאלות (13 סעיפים) ב־ 3 עמודים. משקלו של כל סעיף 8 נקודות. יש לענות על כל השאלות על ידי סימון X במשבצת המתאימה. יש לכתוב **בעט בלבד**. שאלות עם יותר מתשובה אחת מסומנת תיפסלנה. בתום המבחן יש להחזיר את דף השער ואת דף זה בלבד.

בהצלחה!

פונקצית התפלגות נורמלית (גאוסית) תקנית:

x	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
$\Phi(x)$	.54	.58	.62	.66	.69	.73	.76	.79	.82	.84	.89	.93	.96	.98

פונק' צפיפות נורמלית (גאוסית) $N(\mu,\sigma^2)$: $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

פונק' צפיפות מעריכית $Exp(\lambda)$: $x\geq 0$, $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $\sigma_X^2=\frac{1}{\lambda^2}$, $\mu_X=\frac{1}{\lambda}$

פונק' הסתברות פואסונית $Pois(\lambda)$: $k=0,1,2,\ldots$, $P_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $\sigma_X^2=\lambda$, $\mu_X=\lambda$

פונק' הסתברות גיאומטרית $Geo(p)$: $k=1,2,\ldots$, $P_X(k)=(1-p)^{k-1}p$, $\sigma_X^2=\frac{1-p}{p^2}$, $\mu_X=\frac{1}{p}$

תשובות:

	א	ב	ג	ד	ה
שאלה 1					
שאלה 2					
שאלה 3.1					
שאלה 3.2					
שאלה 4					
שאלה 5					

	א	ב	ג	ד	ה
שאלה 6					
שאלה 7					
שאלה 8.1					
שאלה 8.2					
שאלה 9					
שאלה 10					
שאלה 11					

ציון	

שלוש השאלות הראשונות מבוססות על תרגילי הבית

1. כשרינה מגיעה לעירייה לסדר עניין מסויים, הפקיד מתחיל שיחת טלפון אשר אורכה X (בדקות) מפולג מעריכית עם פרמטר $\lambda_X = 0.1$. בתום השיחה הפקיד יתחיל לטפל בעניינה של רינה, טיפול אשר יארך 3 דקות. מצד שני, כעבור Y דקות מרגע הגעתה של רינה לעירייה, המחשב יפול, ועבודת העירייה תשותק עד סוף היום. נתון ש־ Y מפולג מעריכית עם פרמטר $\lambda_Y = 0.2$, וכי X ו־ Y בלתי תלויים.
ההסתברות שרינה תצליח להשלים את הסידורים שווה ל:

(א) $\frac{2}{3}e^{-0.25}$ (ב) $e^{-1.2}$ (ג) $\frac{2}{3}e^{-0.6}$ (ד) $\frac{1}{3}e^{-0.6}$ (ה) $\frac{1}{4}e^{-0.1}$

2. הקטע $[0,1]$ מחולק לשלושה חלקים ע"י הנקודות X,Y , כאשר X,Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה בקטע $[0,1]$.
תוחלת אורכו של הקטע הקצר ביותר שווה ל:

(א) $\frac{1}{5}$ (ב) $\frac{1}{18}$ (ג) $\frac{1}{9}$ (ד) $\frac{1}{6}$ (ה) $\frac{2}{9}$

3. יהא N משתנה מקרי המקבל ערכים שלמים וחיוביים עם תוחלת μ_N ושונות σ_N^2.
מטילים N פעמים מטבע בעל סיכוי להצלחה p כך שההטלות אינן תלויות זו בזו.
נסמן ב־ X את מספר ההצלחות וב־ Y את מספר הכשלונות.

3.1 השונות של X שווה ל:

(א) $p(1-p)\mu_N + p^2\sigma_N^2$ (ב) $p(1-p)\mu_N$ (ג) $p(1-p)\sigma_N^2$

(ד) $p^2\mu_N$ (ה) $p(1-p)\mu_N + p\sigma_N^2$

3.2 נניח כי N מתפלג פואסונית עם פרמטר λ.
התוחלת המותנית $E(X|Y)$ שווה ל:

(א) pN (ב) X (ג) λY (ד) λp (ה) λ

4. נתונה קוביה מאוזנת שצדדיה מסומנים $1,\ldots,6$. ראובן מטיל את הקוביה 15 פעמים כאשר ההטלות אינן תלויות זו בזו. תהא p ההסתברות שה־ "4" הראשון הופיע בהטלה הרביעית, בהנחה שה־ "4" השני הופיע בהטלה העשירית.
p שווה ל:

(א) $\frac{1}{9}$ (ב) $\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^3$ (ג) $\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^5$ (ד) $\frac{1}{4}$ (ה) $\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^8$

5. כד מכיל 10 כדורים לבנים, 10 כדורים שחורים ו־ 10 כדורים אדומים. בוחרים מדגם מקרי של 4 כדורים מתוך הכד עם החזרה. נסמן ב־ X את מספר הכדורים הלבנים (לאו דווקא שונים) שעלו במדגם, וב־ Y את מספר הכדורים השחורים (לאו דווקא שונים) שעלו במדגם.
מקדם המתאם בין X ל־ Y שווה:

(א) 0 (ב) $-\frac{1}{3}$ (ג) $\frac{1}{4}$ (ד) $-\frac{2}{3}$ (ה) $-\frac{1}{2}$

6. מספר האנשים העולים לאוטובוס בתחנה המרכזית הוא משתנה מקרי X המפולג פואסונית עם תוחלת 10. לאוטובוס יש 20 תחנות (לא כולל התחנה המרכזית) וכל נוסע יורד באחת מתחנות אלה בהסתברות שווה (כלומר $\frac{1}{20}$) ובלי תלות בנוסעים האחרים. האוטובוס עוצר רק בתחנות שבהן יורד לפחות נוסע אחד, ואינו אוסף נוסעים חדשים במהלך הנסיעה. יהא Y מספר התחנות בהן האוטובוס עוצר.
התוחלת $E(Y)$ שווה ל:

(א) 10 (ב) $20(1-e^{-2})$ (ג) $20(1-e^{-1/2})$ (ד) $20e^{-1}$ (ה) 7.5

7. נתונים משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים X , Y
המקיימים $X \sim N(\mu_X, 1)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$.
כמוכן נתון כי $\mu_X - \mu_Y = 4$ וכי $P(X > Y) = 0.79$.
σ^2 שווה (בקירוב טוב מאוד) ל:

(א) 0.29 (ב) 3 (ג) 15 (ד) 0.5 (ה) 24

8. יהיו X,Y משתנים מקריים עם פונקציית צפיפות משותפת הנתונה ע"י $f_{X,Y}(x,y)=x(y-x)e^{-y}$ אם $0\le x\le y$, ו־ $f_{X,Y}(x,y)=0$ אחרת.

8.1 פונקציית הצפיפות המותנית $f_{X|Y}(x|y)$ בתחום $0\le x\le y<\infty$ שווה ל:

(א) xe^{-x} (ב) $6x(y-x)y^{-3}$ (ג) $\frac{1}{6}y^3e^{-y}$

(ד) $(y-x)e^{-(y-x)}$ (ה) $\frac{1}{y}$

8.2 התוחלת המותנית $E(X|Y)$ שווה ל:

(א) $2Y+3$ (ב) $5X$ (ג) $3Y$ (ד) $\frac{Y}{2}$ (ה) $X+2$

9. תהא (X,Y) וקטור מקרי בעל התפלגות אחידה בחצי העיגול

$$A=\{(x,y):x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0\}\ .$$

פונקצית הצפיפות $f_Z(z)$ של $Z=\frac{Y}{X}$ הינה:

(א) $\frac{1}{\pi(1+z^2)}$ (ב) $\frac{|z|}{(1+z^2)^2}$ (ג) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$ (ד) $\frac{\pi}{2}e^{-\pi|z|}$ (ה) $\frac{1}{2}e^{-|z|}$

10. יהא (X,Y) וקטור מקרי המקיים $\sigma_X^2=5$ ו־ $\sigma_Y^2=10$.
נתון כי המשתנים המקריים $X+Y$ ו־ $3X-2Y$ הם בלתי תלויים.
הקווריאנס $Cov(X,Y)$ שווה ל:

(א) 7 (ב) 5 (ג) $\sqrt{50}$

(ד) -3 (ה) הנתונים מכילים סתירה

11. מטילים מטבע הוגן שוב ושוב. נסמן ב־ X את מספר ההטלות שהתבצע עד (כולל) ההטלה שבה התקבל "ראש" בפעם ה־ 200 .
הערך של $P(X\ge 370)$ הוא (עפ"י משפט הגבול המרכזי) בקירוב:

(א) 0.93 (ב) 0.69 (ג) 0.76 (ד) 0.84 (ה) 0.98