1. ב. לא. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ מקיימת $Df(a)x = a_1x_1 + a_2x_3$ לכל $a,x\in\mathbb{R}^3$

אחרת $f(a_1,a_2,a_3)$ מקיימת $\frac{\partial f}{\partial a_1}=a_1$, $\frac{\partial f}{\partial a_2}=0$ $\frac{\partial f}{\partial a_3}=a_2$

ולכן $\frac{\partial^2 f}{\partial a_2\partial a_3} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial f}{\partial a_3}\right) = 1 \neq 0 = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial a_3\partial a_2}$, סתירה.

לכן לא קיימת f כזו.

2. א. נמצא כופלי לגרנז' עבור נקודת המקסימום $x=(x_1,\dots,x_n)$

מתקיים

$$(1\ 1\ 0\cdots 0) = (\alpha\ \beta)\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\2x_1&\cdots&2x_n\end{pmatrix} = (\alpha+2\beta x_1,\dots,\alpha+2\beta x_n)$$

כלומר $\alpha+2\beta x_i = \begin{cases}1 & i=1,2\\0 & i\geq 3\end{cases}$. מכאן ש- $\beta\neq 0$ ונקבל כי

$x_1=x_2=s$, $x_3=\dots=x_n=t$, ולכן $\begin{cases}2s+(n-2)t=0\\2s^2+(n-2)t^2=1\end{cases}$.

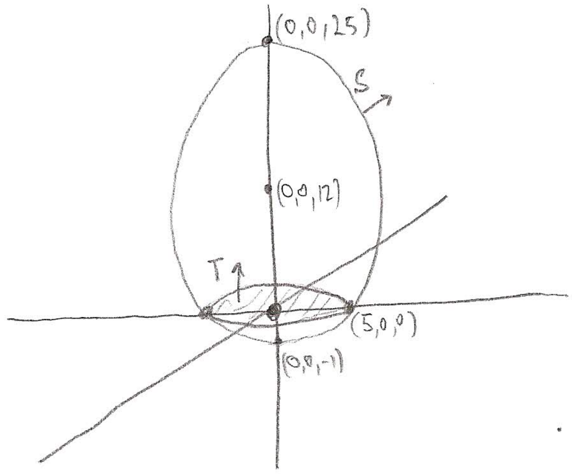
לכן $t=\frac{-2}{n-2}s$ ו- $2s^2+(n-2)\frac{4s^2}{(n-2)^2}=1 \Leftarrow s=\left(\frac{n-2}{2n}\right)^{1/2}$

ולכן $\max\limits_{x\in A}(x_1+x_2)=2s=\left(\frac{2(n-2)}{n}\right)^{1/2}$

ג. אם v משיק ל- $A\cap B$ בנקודה p אזי v מקיים

$$0=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\2p_1&2p_2&2p_3&2p_4&2p_5&\cdots&2p_n\\p_3&-p_4&p_1&-p_2&0&\cdots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\&&&&&\ddots&\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}v=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&1&-1&-1&0&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\\hline &&&&1&&0\\&&0&&&\ddots&\\&&&&0&&1\end{array}\right]v$$

ולכן v כפולה של $(1,-1,1,-1,0,\dots,0)$.



3. א. נסמן $T=\{(x,y,0):\ x^2+y^2\le 5^2\}$

עם נורמל $(0,0,1)$.

$K=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+(z-12)^2\le 13^2,\ z\ge 0\}$.

אזי $\partial K = S-T$ ולכן

$$0=\int_K 0=\int_K \operatorname{div} F=\int_S F\,d\sigma-\int_T F\,d\sigma .$$

לכן

$$\int_S F\,d\sigma=\int_T F\,d\sigma=\int_T (x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{r=0}^{5}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\left.\frac{r^4}{4}\right]_0^5=\frac{625\pi}{2}$$

ב. יהי $A\subset S$ תחום חלק עם שפה $\partial A=T$. אזי

$$(*)\qquad 0=\int_{\gamma=\partial A} G\,dr=\int_A \nabla\times G\,d\sigma=\int_A(-b-2z,-c,-ax)\,d\sigma$$

מכיון ש-(*) נכון לכל A, נובע כי לכל $(x,y,z)\in S$, השדה $(-b-2z,-c,-ax)$ ניצב לנורמל ל-S בנק' (x,y,z), דהיינו ל-$(x,y,z-12)$.

כלומר

$$0=(b+2z)x+cy+ax(z-12)=(2+a)xz+(b-12a)x+cy$$

לכן

$a=-2$, $b=12a=-24$, $c=0$.

4. א. נניח ϕ_1 פונק' פוטנציאל של F על U_1, ϕ_2 פונק' פוטנציאל של F על U_2,

כלומר $\nabla\phi_1=F$ על U_1, $\nabla\phi_2=F$ על U_2.

לכן על $U_1\cap U_2$ מתקיים $\nabla(\phi_1-\phi_2)=0$. $U_1\cap U_2$ קשיר מסילתית

לכן $\nabla(\phi_1-\phi_2)=0$ על $U_1\cap U_2$ $\Leftarrow$ $\phi_1-\phi_2=C$ על $U_1\cap U_2$.

נגדיר ϕ על $U=U_1\cup U_2$ ע"י

$$\phi(u)=\begin{cases}\phi_1(u) & u\in U_1\\ \phi_2(u)+C & u\in U_2\end{cases}.$$

אזי ϕ מוגדרת היטב ומקיימת $\nabla\phi=F$ על U.

4. ג. תהי $U=\mathbb{R}^3-\{(0,0,z): z\in\mathbb{R}\}$ ויהי $F=\frac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$

השדה הוקטורי המוגדר על U. תה"נ ג

$U_1=\mathbb{R}^3-\{(x,0,z): x\geq 0, z\in\mathbb{R}\}$ $\quad$ $U_2=\mathbb{R}^3-\{(x,0,z): x\leq 0, z\in\mathbb{R}\}$

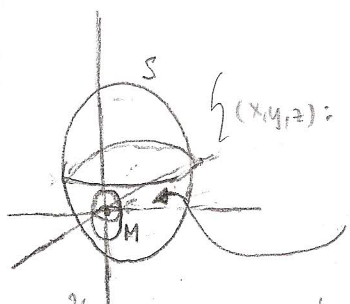
אזי $U_1\cup U_2=U$ ו- $U_1\cap U_2=\{(x,y,z): y\neq 0\}$.

U_1, U_2 פשוטי קשר ו- $\nabla\times F=(0,0,0)$ לכן F משמר ב- U_1, U_2

אבל F אינו משמר ב- U כי $\int_\gamma F\,dr=2\pi$

עבור המסילה $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,0)\in U$, $0\leq t\leq 2\pi$.

5. א. $\operatorname{div} F=0$



ב. יהי $R=0.1$ אזי $\{(x,y,z): 2x^2+2y^2+z^2\leq R^2\}\subset\{(x,y,z): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leq 4\}$

נסמן $K=\{(x,y,z): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leq 4,\ 2x^2+2y^2+z^2\geq R^2\}$

אזי $\partial K=S-M$ כאשר $M=\{(x,y,z): 2x^2+2y^2+z^2=R^2\}$ מכוון החוצה.

תהי T הפרמטריזציה של M: $T(\phi,\theta)=R\left(\frac{\sin\phi\cos\theta}{\sqrt{2}},\frac{\sin\phi\sin\theta}{\sqrt{2}},\cos\phi\right)$

$0\leq\theta\leq 2\pi$, $0\leq\phi\leq\pi$, עם נורמל: $N_T(\phi,\theta)=R^2\sin\phi\left(\frac{\sin\phi\cos\theta}{\sqrt{2}},\frac{\sin\phi\sin\theta}{\sqrt{2}},\frac{\cos\phi}{2}\right)$.

עתה $0=\int_K \operatorname{div}F=\int_S F\,d\sigma-\int_M F\,d\sigma$ ולכן

$$\int_S F\,d\sigma=\int_M F\,d\sigma=\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} F(T(\phi,\theta))\cdot N_T(\phi,\theta)\,d\phi\,d\theta=2\pi$$

ג. אם $F=\nabla\times G$ אזי

$$\int_S F\,d\sigma=\int_S \nabla\times G\,d\sigma=\int_{\partial S} G\,dr=\int_{\emptyset} G\,dr=0$$

בסתירה לסעיף הקודם. לכן אין G כנ"ל.