מבחן באינפי' 3 ־ 6.7.14

משך המבחן שלש שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות.

סימונים: יהא F שדה וקטורי.
האנטגרל הקווי של F על מסילה γ יסומן ע"י: $\int_\gamma F\,dr$.
אנטגרל השטף של F על משטח מכוון S יסומן ע"י: $\int_S F\,d\sigma$.

1. א. (10 נקודות) תהא A קבוצה פתוחה ב־ $\mathbb{R}^m$ ותהא $f : A \to \mathbb{R}^n$.
הגדר: f דיפרנציאבילית בנקודה $a \in A$.

ב. (10 נקודות) האם קיימת פונקציה דיפרנציאבילית $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ כך שלכל $a = (a_1, a_2, a_3), x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ מתקיים
$Df(a)x = a_1x_1 + a_2x_3$?
אם כן, מצא f כזו. אחרת, נמק מדוע אין f כזו.

2. יהא $n \geq 4$ ותהיינה $A, B \subset \mathbb{R}^n$ נתונות ע"י:

$$A = \{\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ x_1 + \cdots + x_n = 0\ ,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\ \}$$

$$B = \{\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ x_1x_3 - x_2x_4 = 0\ ,\ x_5 = x_6 = \cdots = x_n = 0\ \}$$

א. (10 נקודות) חשב את

$$\max\{\ x_1 + x_2\ :\ (x_1, \ldots, x_n) \in A\ \}\ .$$

ב. (10 נקודות) מצא וקטור $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ המשיק ל־ $A \cap B$ בנקודה

$$p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)\ .$$

3. יהא S המשטח המכוון הנתון ע"י

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-12)^2 = 13^2 \ , \ z>0\}$$

עם נורמלים המכוונים הלאה מציר ה־ z.

א. (10 נקודות) יהא F השדה הוקטורי הנתון ע"י:

$$F(x,y,z) = (xz^2, -yz^2, x^2+y^2) \quad .$$

חשב את $\int_S F\,d\sigma$.

ב. (10 נקודות) מצא קבועים $a,b,c \in \mathbb{R}$ כך שהשדה הווקטורי

$$G(x,y,z) = (axy, bz+z^2, cx)$$

מקיים

$$\int_\gamma G\,dr = 0$$

לכל מסילה סגורה γ המוכלת במשטח S.

4. תהא U קבוצה פתוחה ב־ $\mathbb{R}^3$, ויהא F שדה וקטורי גזיר ברציפות המוגדר על U. תהיינה U_1, U_2 קבוצות פתוחות כך ש־ $U_1 \cup U_2 = U$. נניח כי השדה F משמר הן ב־ U_1 והן ב־ U_2 .

א. (10 נקודות) הוכח כי אם $U_1 \cap U_2$ קשירה מסילתית אזי בהכרח F משמר גם ב־ U .

ב. (10 נקודות) האם בהכרח F משמר ב־ U גם ללא ההנחה ש־ $U_1 \cap U_2$ קשירה מסילתית? הוכח או הבא דוגמא נגדית.

5. תהא $A = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ויהא F השדה הוקטורי המוגדר על A ונתון ע"י

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(2x^2+2y^2+z^2)^{3/2}} \ .$$

א. (7 נקודות) חשב $div\,F$.

ב. (7 נקודות) תהא $S = \{(x,y,z) \ : \ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 4\}$ הספירה ברדיוס 2 שמרכזה בנקודה $(1,1,1)$ עם נורמלים המכוונים הלאה מהנקודה $(1,1,1)$.
חשב $\int_S F\,d\sigma$.

ג. (6 נקודות) האם קיים שדה וקטורי G גזיר ברציפות על A כך ש־ $\nabla \times G = F$? נמק.

בהצלחה!