מבחן באינפי' 3 ־ 17.9.14

משך המבחן שלש שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות.

סימונים: יהא F שדה וקטורי.
האנטגרל הקווי של F על מסילה γ יסומן ע"י: $\int_\gamma F\,dr$.
אנטגרל השטף של F על משטח מכוון S יסומן ע"י: $\int_S F\,d\sigma$.

1. תהא $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ פונקציה אי־שלילית גזירה ברציפות ויהא $\Gamma=\{(x,f(x)):x\in(-1,1)\}$ הגרף של f.
יהא S המשטח המתקבל מסבוב Γ סביב ציר ה ־ x.
נתון כי $p=(0,4,3)\in S$ וכי הוקטור $(10,4,3)$ ניצב ל־ S בנקודה p.

א. (10 נקודות) מצא את $f'(0)$.

ב. (10 נקודות) יהא T המישור $x+y+z=7$ ויהא $C=S\cap T$.
נתון כי הפונקציה $g(x,y,z)=8\alpha\sin x+y+\alpha z$ מקבלת מקסימום על C בנקודה p. מצא את α.

2. תהא $\gamma:(-1,1)\to\mathbb{R}^3$ מסילה גזירה ברציפות ב־ $\mathbb{R}^3$ המקיימת $\gamma'(0)\neq(0,0,0)$.

א. (6 נקודות) נסח את משפט הפונקציה ההפוכה.

ב. (7 נקודות) הוכח כי קיימת העתקה גזירה ברציפות $F:(-1,1)^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש־ $DF(0,0,0)$ הפיכה וכך ש־ $F(t,0,0)=\gamma(t)$ לכל $t\in(-1,1)$.

ג. (7 נקודות) הוכח כי קיימות קבוצות פתוחות $0\in U\subset(-1,1)$ ו־ $\gamma(0)\in V\subset\mathbb{R}^3$ וכן פונקציות גזירות ברציפות $f,g:V\to\mathbb{R}$ כך שלכל $(x,y,z)\in V$ מתקיים:
$(x,y,z)\in\gamma(U)$ אם ורק אם $f(x,y,z)=g(x,y,z)=0$.

3. תהא $S_R=\{u\in\mathbb{R}^3 : |u|=R\}$ הספירה ברדיוס R ב־ $\mathbb{R}^3$.
לזוית $0\le\alpha\le\pi$, נסמן ב־ $C_R(\alpha)$ את כל הוקטורים $u\in S_R$ היוצרים זוית קטנה או שווה ל־ α עם ציר ה־ z החיובי.

א. (10 נקודות) חשב את השטח של $C_R(\alpha)$.

ב. (10 נקודות) לכל $R>1$ תהא

$$A_R=\{(x,y,z)\in S_R : x^2+y^2+(z-R)^2\le 1\}.$$

חשב את השטח של A_R.

4. תהא $g(z)$ ממשית גזירה ברציפות. נתון כי השדה

$$F(x,y,z)=\frac{(-y,x-\sin z,y\cdot g(z))}{(x-\sin z)^2+y^2}$$

משמר מקומית בתחום $A=\mathbb{R}^3-\{(\sin z,0,z) : z\in\mathbb{R}\}$.

נגדיר שלוש מסילות סגורות $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 : [0,2\pi]\to A$ ע"י:

$$\gamma_1(t)=(3\cos t,1,2\sin t)$$

$$\gamma_2(t)=(\frac{1}{2},\cos t,\sin t)$$

$$\gamma_3(t)=(\frac{1}{2},\cos t,3\sin t).$$

א. (8 נקודות) מצא את $g(z)$.

ב. (12 נקודות) חשב את $\int_{\gamma_i}F\,dr$ עבור $i=1,2,3$.

5. נתון שדה וקטורי F על $\mathbb{R}^3$ ע"י

$$F(x,y,z) = (xz\sin(yz) + x^3, \cos(yz), 3zy^2 - e^{x^2+y^2}).$$

יהא K התחום

$$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z \le 4 \ , \ z \ge 0\}.$$

תהא S השפה של K המכוונת החוצה מ־ K, ויהא $T \subset S$ המשטח

$$T = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z = 4 \ , \ z \ge 0\}$$

עם נורמל המכוון הלאה מהראשית.

א. (10 נקודות) חשב את $\int_S F\, d\sigma$.

ב. (10 נקודות) חשב את $\int_T F\, d\sigma$.

בהצלחה!

1.א. המשוואה המגדירה את S (ה"י) $y^2+z^2=f(x)^2$ ולכן הנורמל ל-S

בנק' (x,y,z) מקביל ל- $(-2f(x)f'(x), 2y, 2z)$.

לכן בנק' $(0,4,3)$ הנורמל ל-S מקביל ל- $(-2f(0)f'(0), 8, 6)$

עתה $f(0)=\sqrt{4^2+3^2}=5$ ולכן $(-10f'(0), 8, 6)=\lambda(10,4,3)$ ולכן $f'(0)=-2$.

ב. מכלל כופלי לגרנז' נובע כי $\nabla g(p)\in Row\begin{pmatrix}10&4&3\\1&1&1\end{pmatrix}$ $= (8\alpha \quad 1 \quad \alpha)$.

כלומר $\det\begin{bmatrix}10&4&3\\1&1&1\\8\alpha&1&\alpha\end{bmatrix}=0$ $=$ $8\alpha-7+6\alpha$ $\Leftarrow$ $\alpha=\frac{1}{2}$,

2. ב. נסמן $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$. בה"כ $\dot\gamma_1(0)\neq 0$. נגדיר

$F:(-1,1)^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י $F(t,u,v)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t)+u,\gamma_3(t)+v)$. אזי $F(t,0,0)=\gamma(t)$

ו- $\det DF(0,0,0)=\det\begin{bmatrix}\dot\gamma_1(0)&0&0\\\dot\gamma_2(0)&1&0\\\dot\gamma_3(0)&0&1\end{bmatrix}=\dot\gamma_1(0)\neq 0$.

ג. לפי משפט הפונקציה ההפוכה קיים $1>\varepsilon>0$ כך ש- $F:(-\varepsilon,\varepsilon)^3\to\mathbb{R}^3$

חח"ע, $V=F((-\varepsilon,\varepsilon)^3)$ פתוחה, ו- $(h,f,g)=G=F^{-1}:V\to(-\varepsilon,\varepsilon)^3$

גזירה ברציפות. עתה לכל $(x,y,z)\in V$

$$(x,y,z)=F(G(x,y,z))=(\gamma_1(h(x,y,z)),\gamma_2(h(x,y,z))+f(x,y,z),\gamma_3(h(x,y,z))+g(x,y,z)).$$

תהא $U=(-\varepsilon,\varepsilon)$.

אם $f(x,y,z)=g(x,y,z)=0$ אזי $(x,y,z)=\gamma(h(x,y,z))\in\gamma(U)$.

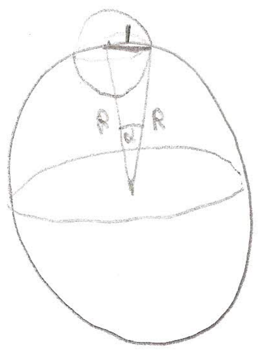
להיפך, אם $(x,y,z)=\gamma(t)$ עבור $|t|<\varepsilon$ אזי

$$F(t,0,0)=\gamma(t)=(x,y,z)=F(h(x,y,z),f(x,y,z),g(x,y,z))$$

ומחח"ע F נובע כי $f(x,y,z)=g(x,y,z)=0$.

3. א. זו הפרמטריזציה הספרית

$$\text{area } C_R(\alpha) = \int_{\phi=0}^{\alpha} \int_{\theta=0}^{2\pi} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi R^2 (1-\cos\alpha)$$



ב. $A_R = C_R(\alpha)$

כאשר α מקיים $2R^2 - 2R^2\cos\alpha = 1$

כלומר $1-\cos\alpha = \frac{1}{2R^2}$, ולכן

$$\text{area } A_R = \text{area } C_R(\alpha) = 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{2R^2} = \pi$$

(אינו תלוי ב-R !).

4. א. מאחר ו-F משמר מקומית מקיים $\nabla\times F=0$ ובפרט

$$-y \cdot 2(x-\sin z)\cos z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{(x-\sin z)^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y\, g(z)}{(x-\sin z)^2+y^2}\right) = -y\, g(z)\cdot 2(x-\sin z)$$

ולכן $g(z)=\cos z$.

ב. γ_1, γ_3 סגורות הומוטופיות לנקודה ב-A, ולכן $\int_{\gamma_1} F\,dr = \int_{\gamma_3} F\,dr = 0$

γ_2 הומוטופית ל- $\gamma(t)=(\cos t, \sin t, 0)$ ולכן

$$\int_{\gamma_2} F\,dr = \int_{\gamma} F\,dr = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{(-\sin t, \cos t, \sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt = 2\pi$$

5. א. לפי משפט הדיברגנץ:

$$\int_S F\,d\sigma = \int_K \operatorname{div} F = \int_K 3(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{x^2+y^2\le 4} \int_{z=0}^{4-(x^2+y^2)} 3(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dz =$$

$$= \int_{x^2+y^2\le 4} 3(x^2+y^2)(4-(x^2+y^2))\,dx\,dy = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} 3r^2(4-r^2)\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{12r^4}{4} - \frac{3r^6}{6}\right]_0^{r=2} = 32\pi$$

ב. נסמן $S_2 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 4\}$, מכוון לכיוון $-(0,0,1)$. אזי

$\int_{S_2} F\,d\sigma = \int_{x^2+y^2\le 4} e^{(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi(e^4-1)$. ולכן

$$\int_{S_1} F\,d\sigma = 32\pi - \int_{S_2} F\,d\sigma = (33-e^4)\pi$$