מבחן באינפי' 3 - 10.7.15

משך המבחן שלש שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות.

סימונים: יהא F שדה וקטורי.
האנטגרל הקווי של F על מסילה γ יסומן ע"י: $\int_\gamma F\,dr$.
אנטגרל השטף של F על משטח מכוון S יסומן ע"י: $\int_S F\,d\sigma$.

1. תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(3,1)=0$ ו־ $Df(3,1)=(4,-5)$. נגדיר $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע"י

$$g(x,y,z)=f(x(y+z),x(y-z)).$$

יהא M המשטח $g(x,y,z)=0$ ותהא $p=(1,2,1)$. שים לב כי $p\in M$.

א. (10 נקודות) מצא את משוואת המישור המשיק ל־M בנקודה p.
ב. (10 נקודות) יהיו a,c קבועים ותהא $h(x,y,z)=x^a yz^c$.
נתון כי

$$h(p)=\max\{h(x,y,z):(x,y,z)\in M, x>0, y>0, z>0\}.$$

מצא את a,c.

2. תהא $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x+y)^2+(y+z)^2+(2x+3z)^2\le 1\}$.

א. (10 נקודות) מצא העתקה לינארית T המעתיקה את כדור היחידה $B=\{(u,v,w):u^2+v^2+w^2\le 1\}$ על A, וחשב את הנפח של A.

ב. (3 נקודות) חשב את

$$\int_B uv\,du\,dv\,dw\ ,\ \int_B vw\,du\,dv\,dw\ ,\ \int_B uw\,du\,dv\,dw\ .$$

ג. (7 נקודות) חשב את $\int_A(3x+2z)^2\,dx\,dy\,dz$.
(אפשר להעזר בסעיפים א' ו־ ב').

3. תהא $U=\mathbb{R}^3-\{(t,0,t)\in\mathbb{R}^3 : t\in\mathbb{R}\}$ ותהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. נתון כי השדה

$$F(x,y,z)=\frac{(g(y),x-z,y)}{(x-z)^2+y^2}$$

הינו משמר מקומית ב־ U.

א. (10 נקודות) מצא את $g(y)$.

ב. (10 נקודות) יהיו $\gamma_1,\gamma_2:[0,2\pi]\to U$ המסילות הנתונות ע"י:

$$\gamma_1(t)=(2\cos t,3\sin t,1)\ \ ,\ \ \gamma_2(t)=(2\cos t,3\sin t,10)$$

חשב את $\int_{\gamma_i}F\,dr$ עבור $i=1,2$.

4. תהא $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. יהא M המשטח הנתון ע"י הפרמטריזציה $z=g(x)-y$ כאשר $0\le x\le 1$ ו־ $\frac{g(x)}{2}-1\le y\le\frac{g(x)}{2}+1$.

א. (10 נקודות) בטא את השטח של M כאנטגרל לפי x של אנטגרנד התלוי ב־ $g'(x)$.

ב. (10 נקודות) יהיו A,B קבועים ויהיה F השדה הוקטורי על $\mathbb{R}^3$ הנתון ע"י:

$$F(x,y,z)=(x^2+2y^2+3z^2,x(z+Ay),x(y+Bz)).$$

נתון כי $\int_\gamma F\,dr=0$ לכל מסילה סגורה γ המוכלת ב־ M.
מצא את A,B.

5. לוקטור $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ נסמן $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
תהא $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ויהא F השדה הוקטורי המוגדר על התחום $A=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ ונתון ע"י:

$$F(x,y,z)=f(r(x,y,z))(x,y,z) \quad .$$

א. (10 נקודות) האם השדה F בהכרח משמר בתחום A ? נמק.

ב. (10 נקודות) נסמן ב־ $S_R=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=R^2\}$ את הספירה ברדיוס R עם נורמלים מכוונים מחוץ לכדור. נתון כי לכל $R>0$ מתקיים:

$$\int_{S_R} F\,d\sigma=1 \quad .$$

מצא את הפונקציה f.

בהצלחה!

1. א. נתון $\alpha:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $\alpha(x,y,z)=(x(y+z),x(y-z))$.

אזי $g(x,y,z)=f(\alpha(x,y,z))$. $D\alpha(x,y,z)=\begin{bmatrix} y+z & x & x \\ y-z & x & -x \end{bmatrix}$

ולכן $D\alpha(1,2,1)=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. לכן

$$Dg(1,2,1)=Df(\alpha(1,2,1))\cdot D\alpha(1,2,1)=Df(3,1)\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}=[4\ \ -5]\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}=[7,-1,9].$$

לכן משוואת המישור המשיק ל-M בנקודה p הינה

$$7(x-1)-(y-2)+9(z-1)=0.$$

ב. לפי כלל כופלי לגרנז' קיים λ כך ש-

$$(2a,1,2c)=Dh(p)=\lambda Dg(p)=\lambda(7,-1,9)$$

ולכן $\lambda=-1$, $b=-\frac{9}{2}$, $a=-\frac{7}{2}$.

2. א. נתונה $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ההעתקה הלינארית הנתונה ע"י

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ 2x+3z \end{pmatrix}.$$

אזי S מעתיקה את A על B. לכן

$T=S^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ מעתיקה את B על A.

$\det T=(\det S)^{-1}=\frac{1}{5}$

ולכן לכל $f:A\to\mathbb{R}$

$$\int_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z)=\int_{(u,v,w)\in B} f\left(T\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right)\cdot\det T\,du\,dv\,dw$$

עבור $f\equiv 1$ נקבל

$$\mathrm{Vol}(A)=\frac{1}{5}\mathrm{Vol}(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{4\pi}{3}=\frac{4\pi}{15}$$

ד. $\int_B uv = \int_B uw = \int_B vw = 0$.

ה. $\int_A (3x+2z)^2 = \int_B \left[3\left(\frac{1}{5}(3u-3v+w)\right)+2\left(\frac{1}{5}(-2u+2v+w)\right)\right]^2 \cdot \frac{1}{5}\, du\, dv\, dw$

$$= \frac{1}{5}\int_B (u-v+w)^2\, du\, dv\, dw = \frac{1}{5}\int_B (u^2+v^2+w^2)\, du\, dv\, dw$$

$$= \frac{1}{5}\int_{r=0}^{1}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\cdot(r^2\sin\phi)\, dr\, d\phi\, d\theta = \frac{4\pi}{25}$$

3. -10

$$\frac{-g(y)\cdot 2(z-x)}{((x-z)^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g(y)}{(x-z)^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x-z)^2+y^2}\right) = \frac{-y\cdot 2(x-z)}{((x-z)^2+y^2)^2}$$

לכן $g(y)=-y$.

ב. נגדיר $\gamma_3:[0,2\pi]\to U$ נתונה ע"י $\gamma_3(t)=(\cos t,\sin t,0)$,

$$\int_{\gamma_3} F\, dr = \int_{\gamma_3}\frac{(-y,\,x-z,\,y)}{(x-z)^2+y^2}\, dr = \int_{t=0}^{2\pi}\frac{(-\sin t,\cos t,\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t,\cos t,0)\, dt = 2\pi$$

אזי

למה $\gamma_1\simeq\gamma_3$ ב-U לכן $\int_{\gamma_1} F\, dr = 2\pi$

$\gamma_2\simeq pt$ ב-U לכן $\int_{\gamma_2} F\, dr = 0$.

4. א. נגדיר $U=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ |y-\frac{g(x)}{2}|\le 1\}$, $\varphi:U\to M$

$$\varphi(x,y)=(x,y,g(x)-y)$$

$$N_\varphi(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \times\begin{pmatrix}1 & 0 & g'(x)\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = (-g'(x),1,1)$$

$$\text{area}(M) = \int_{(x,y)\in U} |N_\varphi(x,y)|\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=\frac{g(x)}{2}-1}^{\frac{g(x)}{2}+1} \left(2+g'(x)^2\right)^{1/2} dy$$ לכן

$$= 2\int_{x=0}^{1} \left(2+g'(x)^2\right)^{1/2} dx$$

ג. יהי C תחום כלשהו ב-M אזי

$$0 = \int_{\partial C} F\,dr = \int_C \nabla\times F\,d\sigma = \int_C \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2+2y^2+3z^2 & x(z+Ay) & x(y+Bz) \end{pmatrix} d\sigma$$

$$= \int_C \left(0,\ 6z-(y+Bz),\ z+Ay-4y\right) d\sigma = \int_{(x,y)\in U} \left(0, (6-B)z-y, z+(A-4)y\right)\cdot(-g'(x),1,1)$$

$$= \int_{(x,y)\in U} \left[(6-B)z-y+z+(A-4)y\right] = \int_{(x,y)} \left[(7-B)z+(A-5)y\right]$$

לכן $(A,B)=(5,7)$.

5. א. F מקיים $\nabla\times F=0$, נסמן $u=(x,y,z)$ אזי לכל

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(r(u))\cdot x\right) = f'(r(u))\cdot\frac{2xy}{2r(u)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(r(u))\,y\right) = f'(r(u))\,\frac{2yx}{2r(u)},$$

לכן, מאחר ו-A פתוח קשר נובע ש-F משמר ב-A.

ב. נעזר בפרמטריזציה הרגילה $T_R:[0,\pi]\times[0,2\pi]\to S_R$ אזי לכל R

$$1 = \int_{S_R} F\,d\sigma = \int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} f(R)\,T_R(\phi,\theta)\cdot R\sin\phi\cdot T_R(\phi,\theta)\,d\phi\,d\theta$$

$$= f(R)\,R^3\cdot 4\pi \quad\Rightarrow\quad f(R)=\frac{1}{4\pi R^3}$$