1. יהא $k \geq 1$ מספר טבעי קבוע ויהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הפיתוח של $\frac{1}{(1-x)^k}$ לטור חזקות בתחום $|x| < 1$. נתון כי $a_3 = 20$.
k שווה ל:

(א) 2 (ב) 3 (ג) 4 (ד) 6 (ה) 8

2. נתונים שלשה וקטורים $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ויהא $z = (u + 2v + 3w) \times (4u + 5v + 6w)$.
נתון כי $z \cdot w = 24$.
נפח המקבילון הנוצר ע"י הוקטורים u, v, w שווה ל:

(א) $\frac{24}{13}$ (ב) $\frac{24}{5}$ (ג) 3 (ד) 4 (ה) 8

3. יהא S המשטח $xy + z^2 + xz = 2$ ויהא M מישור המשיק ל- S ומקביל למישור $z = x + y$.
המרחק בין M לראשית הצירים שווה ל:

(א) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (ב) $\frac{7}{\sqrt{3}}$ (ג) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ד) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (ה) $\frac{8}{\sqrt{3}}$

4. יהיו $a, b > 0$ טבעיים קבועים ותהא $f(x,y) = 3y - x^a - y^b$.
יהא S המשטח $z = f(x,y)$ ותהא $p = (1,1,1)$ נקודה על S.

4.1 הנורמל למשטח S בנקודה p מקביל לווקטור:

(א) $(1, 1, -1)$ (ב) $(1, -b, a)$ (ג) $(a, b-3, 1)$ (ד) $(-a+3, b, 1)$ (ה) $(a, -3, 1)$

4.2 תהא $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $g(p) = 0$ וכן

$$\nabla g(p) = (b-2, a+1, 3a-b) .$$

יהא M המשטח $g(x,y,z) = 0$ ויהא $C = S \cap M$ עקום החיתוך של המשטחים S ו- M.
נתון כי המשיק ל- C בנקודה p מקביל לווקטור $(1, -1, 2)$.
הזוג (a, b) שווה ל:

(א) $(1, 2)$ (ב) $(2, 3)$ (ג) $(4, 5)$ (ד) $(6, 8)$ (ה) $(2, 7)$

5. נפח הגוף החסום ע"י המשטח הסגור

$$(x+y+z)^2+(2x+y+z)^2+(3x+4y+z)^2=4$$

שווה ל:

(א) $\frac{64\pi}{9}$ (ב) $\frac{4\pi}{3}$ (ג) 32π (ד) $\frac{32\pi}{9}$ (ה) $\frac{8\pi}{3}$

6. נתונה פונקציה גזירה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ונתון שהנגזרות הכווניות של f בנקודה $p=(0,0)$ בכוונים $u=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ ו- $v=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ הינן $f'(p;u)=2$ ו- $f'(p;v)=1$.
תהא $g(t)=f(-\sin(3t),12t)$.
$g'(0)$ שווה ל:

(א) 0 (ב) 5 (ג) 20 (ד) 10 (ה) 15

7. נגדיר העתקה ψ מהקבוצה

$$B=\{(x,y):1\le x+y\le 2\ ,\ x\le y\le 2x\}$$

למישור u,v ע"י

$$\psi(x,y)=(u,v)=(x+y,\frac{y}{x})$$

7.1 היעקוביאן $J_\psi(x,y)$ שווה ל:

(א) 1 (ב) $\frac{x+y}{x^2}$ (ג) $\frac{x+y}{y^2}$ (ד) $\frac{x}{(y+1)^2}$ (ה) $\frac{y}{(x+1)^2}$

7.2 $\int_B \frac{dx\,dy}{x+y}$ שווה ל:

(א) $\frac{2}{3}$ (ב) $\frac{1}{4}$ (ג) $\frac{1}{3}$ (ד) $\frac{1}{6}$ (ה) $\frac{1}{2}$

.1 $\Leftarrow f(x)=(1-x)^{-k}$

לכן $f'''(x)=k(k+1)(k+2)(1-x)^{-k-3}$.

$$20=a_3=\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{(k+2)(k+1)k}{6}\Rightarrow k=4$$

.2

$$24=z\cdot w=\left[(u+2v+3w)\times(4u+5v+6w)\right]\cdot w=$$

$$=\left[(u+2v)\times(4u+5v)\right]\cdot w=5(u\times v)\cdot w+8(v\times u)\cdot w$$

$$=-3(u\times v)\cdot w\Rightarrow \text{Volume}=|(u\times v)\cdot w|=\frac{24}{3}=8$$

.3 נסמן $f(x,y,z)=xy+z^2+xz-2$. אם M משיק ל- S בנקודה $p=(x,y,z)$

אזי קיים $\lambda\neq0$ כך ש- $\lambda(1,1,-1)=\nabla f(x,y,z)=(y+z,x,x+2z)$, כלומר

$y+z=x$, $x=-x-2z$, ולכן $z=-x$, $y=2x$ ולכן $p=(x,2x,-x)$.

לכן $f(p)=2x^2+x^2-x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm1 \Rightarrow p=\pm(1,2,-1)$

המרחק בין p למישור $x+y=z$ הוא $\frac{|p\cdot(1,1,-1)|}{|(1,1,-1)|}=\frac{|(1,2,-1)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

.4.1

$$N=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1),-\frac{\partial f}{\partial y}(1,1),1\right)=(a,b-3,1)$$

4.2

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b-3 & 1\\ b-2 & a+1 & 3a-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-(b-3)+2\\ b-2-(a+1)+2(3a-b)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a-b+5\\5a-b-3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=5\\5a-b=3\end{cases}\Rightarrow (a,b)=(2,7)$$

.5

$A=\{(u,v,w):\ u^2+v^2+w^2\le 2^2\}$, $B=\{(x,y,z):\ (x+y+z)^2+(2x+y+z)^2+(3x+4y+z)^2\le 2^2\}$

$\Psi(x,y,z)=(x+y+z,\ 2x+y+z,\ 3x+4y+z)$ $\qquad \Psi: B\to A$

$$.\ J_\Psi(x,y,z)=\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=3$$

$$\mathrm{Vol}(B)=\int_B dx\,dy\,dz=\int_A \frac{du\,dv\,dw}{J_\Psi}=$$

$$\frac{1}{3}\mathrm{Vol}(A)=\frac{1}{3}\,\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3=\frac{32}{9}\pi$$

$.\ \nabla f(0,0)=(A,B)$ .6

$$2=f'(p;u)=(A,B)\,u=(A,B)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

$$1=f'(p;v)=(A,B)\,v=(A,B)\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases}3A+4B=10\\ -3A+4B=5\end{cases}\quad\Rightarrow\quad (A,B)=\left(\frac{5}{6},\frac{15}{8}\right)$$

$$g'(0)=\nabla f(0,0)\cdot(-3,12)=\left(\frac{5}{6},\frac{15}{8}\right)(-3,12)=-\frac{15}{6}+\frac{15\cdot 3}{2}=20$$

.7.1

$$J_\varphi(x,y)=\det\begin{bmatrix}1 & -\frac{y}{x^2}\\ 1 & \frac{1}{x}\end{bmatrix}=\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{x+y}{x^2}$$

$x=\frac{4}{1+v}$, $x+y=u$ $\qquad$ 7.2

$$\int_B \frac{dx\,dy}{x+y}=\int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{2}\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{J_\varphi(\varphi^{-1}(u,v))}\,du\,dv=$$

$$=\int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{2}\frac{1}{u}\cdot\left(\frac{u}{\left(\frac{u}{1+v}\right)^2}\right)^{-1}du\,dv=\int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{2}\frac{du\,dv}{(1+v)^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$