## שאלה מס' 1

תהא $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות ויהא $S=\{(x,y,g(x,y)):x,y\in\mathbb{R}\}$ הגרף של $g$.
נתון כי $g(3,2)=4$ ו־ $\nabla g(3,2)=(5,3)$. תהא $p=(3,2,4)$.
יהא $T$ המשטח $2x^2+3y^2=30$.

א. (6 נקודות) המישור המשיק ל־$S$ בנקודה $p$ חותך את המישור $x+y+z=3$ בישר שכוונו מקביל ל:

$(4,-1,0)$ $(1,-2,1)$ $(6,-4,1)$ $(3,-5,2)$ $(5,3,0)$

$(5,3,-1)$ $(1,1,1)$ $(-1,3,1)$ $(2,-3,1)$ $(3,5,-1)$

ב. (6 נקודות) תהא $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. נסמן ב־ $C=S\cap T$ את עקום החיתוך של המשטחים $S$ ו־ $T$. שים לב כי $p\in C$. נתון שהמקסימום של $f$ על $C$ מתקבל בנקודה $p$. הגרדיאנט $u=\nabla f(p)$ מקיים בהכרח:

$u\|(1,-1,-2)$ $u\|(1,-1,2)$ $u\|(5,3,0)$ $u\|(1,-2,3)$ $u\|(2,3,0)$

$u\perp(1,-1,-2)$ $u\perp(1,-1,2)$ $u\perp(5,3,0)$ $u\perp(1,-2,3)$ $u\perp(2,3,0)$

ג. (6 נקודות) נסמן ב־ $D$ את עקום החיתוך של המשטח $T$ עם המישור $y=\sqrt{2}z$.
האורך של $D$ שווה ל:

$8\pi$ $\sqrt{30}\pi$ $\pi$ $\sqrt{10}\pi$ $\sqrt{60}\pi$ $10\pi$ $\sqrt{15}\pi$

## שאלה מס' 2

תהא $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ויהא $a > 0$ קבוע טבעיים.
נתון כי השדה

$$G = \frac{(y^a, -xy^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2}$$

הינו משמר מקומית בתחום $A$.

**א.** (6 נקודות) $a$ שווה ל:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

**ב.** (6 נקודות) תהא $\Gamma$ האליפסה $4x^2 + 9y^2 = 1$ המכוונת נגד כוון השעון.
$\int_\Gamma G\,dr$ שווה ל:

$1$ $-1$ $0$ $\frac{1}{2\pi}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{2}$ $2$ $-2$ $-\frac{1}{4\pi}$

**ג.** (6 נקודות) יהא $F$ השדה הווקטורי

$$F = \frac{(-y, x)}{2\pi(x^2+y^2)}$$

המוגדר על התחום $A$. נתון כי $\gamma$ הינה מסילה ב־ $A$ המתחילה בנקודה $(-3,0)$ ומסתיימת בנקודה $(2,-2)$. נתון גם כי

$$-0.3 < \int_\gamma F dr < 1.3$$

$\int_\gamma F dr$ שווה ל:

$-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{6}$ $0$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{9}{8}$

## שאלה מס' 3

יהיו $A, B, C$ קבועים. יהא $T$ המשולש ב־ $\mathbb{R}^3$ שקדקדיו הם $(1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)$ עם נורמל המכוון הלאה מהראשית. יהא $F$ השדה הווקטורי הנתון ע"י:

$$F(x,y,z) = (z + A(y-x)z + By^2, x - 2zx - 3z^2, y) \quad .$$

נתון כי <u>לכל</u> תחום $S \subset T$ עם שפה $\gamma = \partial S$ שכוונה מושרה מכוון $T$ מתקיים

$$\int_\gamma F\, dr = C \cdot area(S)$$

**א.** (6 נקודות) $A$ שווה ל:

$-10$ $-8$ $-6$ $-4$ $-2$ $0$ $2$ $4$ $6$ $8$

**ב.** (6 נקודות) $C$ שווה ל:

$5$ $\frac{5}{3}$ $9$ $0$ $-3$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$

**ג.** (6 נקודות) יהא $G$ השדה הווקטורי הנתון ע"י:

$$G = (1 + x(1 + e^y - \sin z), 1 + y(1 + \sin z - x^2), 1 + z(1 + x^2 - e^y)).$$

$\int_T G\, d\sigma$ שווה ל:

$\frac{1}{6}$ $1$ $4$ $\frac{11}{2}$ $-\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$ $3$ $0$ $-1$ $\frac{3}{2}$

## שאלה מס' 4

יהא $C$ קבוע ממשי. תהא $A = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ויהא $F$ השדה הוקטורי המוגדר על $A$ ונתונים ע"י

$$F(x,y,z) = \frac{(x, y - Cz, y + z)}{(x^2 + y^2 + 4z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

נתון כי $div\, F = 0$.

יהיו $S_1, S_2$ המשטחים

$$S_1 = \{(x,y,z) \ : (x-1)^4 + (y-1)^4 + (z-1)^4 = 2\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \ : (x-1)^4 + (y-1)^4 + (z-1)^4 = 4\}$$

עם נורמלים המכוונים כלפי חוץ.

**א.** (6 נקודות) $C$ שווה ל:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 7 | $-2$ | 6 | 9 | 4 |

**ב.** (6 נקודות) $\int_{S_1} F\, d\sigma$ שווה ל:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{3}$ | 0 | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{\pi}{4}$ | $4\pi$ | $\sqrt{2}\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ |

**ג.** (6 נקודות) $\int_{S_2} F\, d\sigma$ שווה ל:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{3}$ | 0 | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $4\pi$ | $2\pi$ | $\sqrt{2}\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ |

**ד.** (6 נקודות) האם קיים שדה וקטורי גזיר ברציפות $G$ על $A$ המקיים $\nabla \times G = F$ ? נמק תשובתך.

<u>לא קיים</u> שדה כזה. 1 <u>הוכחה</u>: 5 נניח בשלילה $\nabla \times G = F$

אזי

$$0 \overset{\text{לפי סעיף ג'}}{\neq} \int_{S_2} F\, d\sigma = \int_{S_2} \nabla \times G\, d\sigma \overset{\text{סטוקס}}{=} \int_{\partial S_2} G\, dr = \int_{\text{קב' ריקה}} G\, dr = 0$$

## פתרון שאלה 5: נמצא נק' קיצון ואוכף של $f(x,y)=x^2y^2-5x^2-8xy-5y^2$.

נק' קריטיות $(x,y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2-10x-8y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2-8x-10y=0 \end{cases}$$

כלומר:

$$(*) \quad \begin{cases} 5x+4y = xy^2 \\ 4x+5y = yx^2 \end{cases}.$$

אם $xy=0$ אז' הפתרון היחיד למערכת $(*)$ הוא $\boxed{(x,y)=(0,0)}$

אם $xy\neq 0$ ו- $x=y$ אז' $9x=5x+4y=xy^2=x^3$

$\Leftarrow$ $\boxed{(x,y)=(3,3)}$ או $\boxed{(x,y)=(-3,-3)}$

אם $xy\neq 0$ ו- $x\neq y$ (נחסיר במשוואה הראשונה מהשניה ונקבל)

$y-x=yx(x-y) \Rightarrow xy=-1$

$\Leftarrow$ $-x = yx^2 = 4x+5y = 4x-\frac{5}{x} \Rightarrow \frac{5}{x}=5x$

$\Leftarrow$ $\boxed{(x,y)=(1,-1)}$ או $\boxed{(x,y)=(-1,1)}$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2-10 & 4xy-8 \\ 4xy-8 & 2x^2-10 \end{bmatrix}.$$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ -8 & -10 \end{bmatrix}$ מוגדרת שלילית $\Rightarrow$ $(0,0)$ מקס. מקומי.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Hess} f(-3,-3) = \text{Hess} f(3,3) = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 28 & 8 \end{bmatrix} \\ \text{Hess} f(1,-1) = \text{Hess} f(-1,1) = \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ -12 & -8 \end{bmatrix} \end{array}\right\}$$

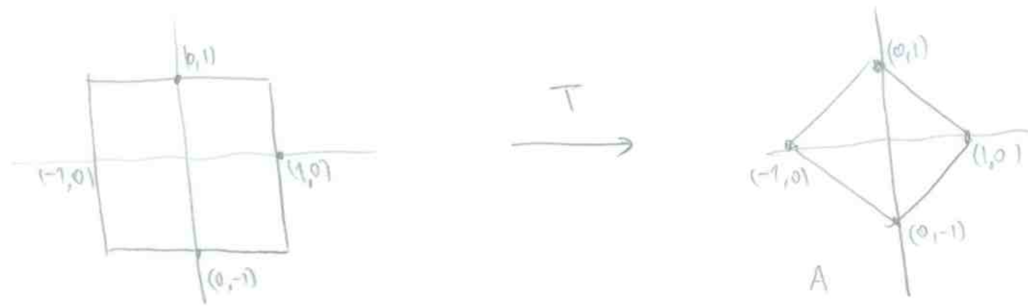
דטרמיננטה שלילית $\Rightarrow$ נק' אוכף.

## שאלה מס' 6

(11 נקודות) יהא $A$ הריבוע שקדקדיו הם $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$.
חשב

$$\int_A (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\, dxdy$$

דוגמא לפתרון:




נגדיר $T:[-1,1]^2 \to A$ ע"י $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$

אזי $$|J_T(u,v)| = \left|\det \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\int_A (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{u=-1}^{1}\int_{v=-1}^{1} u^2 e^{uv}\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u=-1}^{1} u^2 \left[\frac{e^{uv}}{u}\right]_{v=-1}^{v=1} du = \frac{1}{2}\int_{u=-1}^{1} u(e^u - e^{-u})\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^u(u-1) + e^{-u}(u+1)\right]_{u=-1}^{u=1} = 2e^{-1}$$

1. א. כיוון הנורמל ל-S בנק' p הוא $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(p), \frac{\partial g}{\partial y}(p), -1\right) = (5,3,-1)$

כיוון הנורמל למישור $x+y+z=3$ בנק' p הוא $(1,1,1)$. לכן

כיוון ישר החיתוך הוא $(5,3,-1)\times(1,1,1) = (4,-6,2) = 2(2,-3,1)$.

ב. p נק' המקסימום של f תחת האילוצים:

$$\begin{cases} G(x,y,z) = g(x,y) - z = 0 \\ H(x,y,z) = 2x^2+3y^2-30 = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla G(p) + \lambda_2 \nabla H(p) = \lambda_1(5,3,-1) + \lambda_2(12,12,0) =$$

$$= \lambda_1(5,3,-1) + 12\lambda_2(1,1,0)$$

לכן $\nabla f(p)$ ניצב ל- $(5,3,-1)\times(1,1,0) = (1,-1,2)$

ג. פרמטריזציה אפשרית של D הינה $\gamma(t) = (\sqrt{15}\cos t, \sqrt{10}\sin t, \sqrt{5}\sin t)$

כאשר $0 \le t \le 2\pi$ ולכן

$$L(\gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_{t=0}^{2\pi} \left[(-\sqrt{15}\sin t)^2 + (\sqrt{10}\cos t)^2 + (\sqrt{5}\cos t)^2\right]^{\frac12} dt$$

$$= \sqrt{15}\cdot 2\pi = \sqrt{60}\,\pi$$

2. א. G משמר מקומית ב-A אם $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^a}{(x^2+y^2)^2}\right]$.

עתה:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right] &= \frac{3x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^3} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^a}{(x^2+y^2)^2}\right] &= \frac{ax^2y^{a-1} - (4-a)y^{a+1}}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 3$$

ב. תהא $\gamma$ המסילה $x^2+y^2=1$ המכוונת נגד כיוון השעון

עם הפרמטריזציה $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $0 \le t \le 2\pi$.

2. ב. (המשך). המסילות $\Gamma,\gamma$ הומוטופיות ב-$A$, לכן מכיוון ש-$G$ משמר מקומית נקבל:

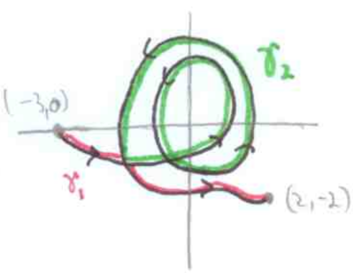
$$\int_\Gamma G\,dr = \int_\gamma G\,dr = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{(y^3,-xy^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dr =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} (\sin^3 t, -\cos t \sin^2 t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \sin^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -\frac{1}{2}$$

ג. תהי $B=\{(x,y):\ x<0 \text{ או } y<0\}$. השדה $F$ משמר ב-$B$

עם פוטנציאל $\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(\text{זווית בין } (x,y) \text{ לציר } x \text{ החיובי}\right)$.




נפרק את $\gamma$ כ- $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ כאשר

$\gamma_1\subset B$ ו- $\gamma_2$ מסילה סגורה ב-$A$. אז:

$$\int_\gamma F\,dr = \int_{\gamma_1} F\,dr + \int_{\gamma_2} F\,dr = [\phi(2,-2)-\phi(-3,0)] + 2\pi k =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3\pi}{4}-0\right) + 2\pi k = \frac{3}{8}+2\pi k.$$

כאשר $k$ הוא מס' הפעמים ש-$\gamma_2$ מקיפה את $(0,0)$ בכיוון החיובי.

$-0.3 < \frac{3}{8}+2\pi k < 1.3 \Leftarrow k=0 \Leftarrow \int_\gamma F\,dr = \frac{3}{8}$.

3. א+ב; $\nabla\times F = (1,1,1)+(2x+6z, A(y-x), -2z-Az-2By)$.

הנורמל ל-$S$ באורך 1 הינו $\frac{(1,\frac{1}{2},1)}{|(1,\frac{1}{2},1)|} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

$$\int_{\partial S} F\,dr = \int_S \nabla\times F\,d\sigma = \frac{1}{3}\left[\int_S (1,1,1)\cdot(2,1,2) + \int_S (2x+6z, A(y-x), -2z-Az-2By)\cdot(2,1,2)\right] =$$

3. ב+ג (המשך)

$$= \frac{5}{3}\,\mathrm{area}(S) + \frac{1}{3}\int_S \left[(4-A)x + (A-4B)y + (8-2A)z\right] d\sigma$$

אם $\int_{\partial S} F\,dr$ הינו כפולה קבועה של $\mathrm{area}(S)$, אזי

$4-A = A-4B = 8-2A = 0$ ולכן $A=4$. ולכן $\int_{\partial S} F\,dr = \frac{5}{3}\,\mathrm{area}(S)$

ולכן $C = \frac{5}{3}$.

3. ג. נגדיר $K = \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0,\ x + \frac{y}{2} + z \leq 1\}$, אזי $\partial K = T \cup S_x \cup S_y \cup S_z$

כאשר $S_x = \{(0,y,z) \in K : \frac{y}{2} + z \leq 1\}$ עם נורמל $-e_1$

$S_y = \{(x,0,z) \in K : x + z \leq 1\}$ עם נורמל $-e_2$

$S_z = \{(x,y,0) \in K : x + \frac{y}{2} \leq 1\}$ עם נורמל $-e_3$.

$\mathrm{div}\, G = 3$ לכן .

$$1 = 3\cdot \mathrm{vol}(K) = \int_K \mathrm{div}\, G = \int_T G\,d\sigma + \int_{S_x} G\,d\sigma + \int_{S_y} G\,d\sigma + \int_{S_z} G\,d\sigma =$$

$$= \int_T G\,d\sigma - \mathrm{area}(S_x) - \mathrm{area}(S_y) - \mathrm{area}(S_z) = \int_T G\,d\sigma - \left(1 + \frac{1}{2} + 1\right)$$

לכן $\int_T G\,d\sigma = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

4. א.

$$0 = \mathrm{div}\, F = \frac{3(x^2+y^2+4z^2)^{3/2} - 3(x^2+y^2+4z^2)^{1/2}\cdot(x^2 + y(y-Cz) + 4(y+z)z)}{(x^2+y^2+4z^2)^3}$$

לכן $x^2+y^2+4z^2 = x^2 + y(y-Cz) + 4(y+z)z$

ולכן $C=4$.

4.ג. וכן $K_1=\{(x,y,z):\ (x-1)^4+(y-1)^4+(z-1)^4\le 2\}$ אזי $K_1\subset A$ ולכן

$$\int_{S_1} F\,d\sigma=\int_{K_1}\operatorname{div}F=\int_{K_1}0=0.$$

ד. נבחר $R$ מספיק גדול ($R=10$ למשל) כך שהאליפסואיד

$$E_R=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+4z^2\le R^2\}$$

יכיל את $K_2=\{(x,y,z):\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 3\}$.

נסמן $K_3=E_R-K_2$ אזי $0\notin K_3$ ולכן

$$0=\int_{K_3}0=\int_{K_3}\operatorname{div}F=\int_{\partial K_3}F\,d\sigma=\int_{\partial E_R}F\,d\sigma-\int_{S_2}F\,d\sigma$$

נבחר $T:[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\partial E_R$ הפרמטריזציה

$$T(\phi,\theta)=R\left(\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \tfrac12\cos\phi\right)$$

$$N_T(\phi,\theta)=\frac{\partial T}{\partial\phi}\times\frac{\partial T}{\partial\theta}=\begin{array}{l}R\left(\cos\phi\cos\theta,\ \cos\phi\sin\theta,\ -\tfrac12\sin\phi\right)\\ \times\\ R\left(-\sin\phi\sin\theta,\ \sin\phi\cos\theta,\ 0\right)\\ \hline R^2\left(\tfrac12\sin^2\phi\cos\theta,\ \tfrac12\sin^2\phi\sin\theta,\ \cos\phi\sin\phi\right)\end{array}$$

אזי

$$\int_{\partial E_R}F\,d\sigma=$$

$$\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{R^3}{R^3}\left(\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta-\tfrac42\cos\phi,\ \sin\phi\sin\theta+\tfrac12\cos\phi\right)\bullet\left(\tfrac12\sin^2\phi\cos\theta,\ \tfrac12\sin^2\phi\sin\theta,\ \cos\phi\sin\phi\right)$$

$$=\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\tfrac12\sin^3\phi\cos^2\theta+\tfrac12\sin^3\phi\sin^2\theta+\tfrac12\cos^2\phi\sin\phi\right)$$

$$=\frac12\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\phi\,d\phi\,d\theta=\frac12\cdot2\cdot2\pi=2\pi.$$