שאלה מס' 1

נסמן $p=(0,0)$ ו־ $q=(0,0,0)$. תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f(p)=0$ ו־ $\nabla f(p)=(\sqrt{3},1)$.

א. (6 נקודות) ברשימת הכיוונים הבאים מופיע כיוון יחיד u כך שקצב הגידול של f בנקודה p בכיוון u שווה לחצי קצב הגידול המקסימלי של f בנקודה p.
u שווה ל:

$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ $(0,-1)$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ $(-1,0)$

$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ $(0,1)$ $(1,0)$ $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

ב. (6 נקודות) יהא S המשטח $f(\sqrt{3}(x+y),5x-y)=\sin(2z)$.
שים לב כי הנקודה q נמצאית על S.
הנורמל למשטח S בנקודה q מקביל ל:

$(4,1,-1)$ $(\sqrt{3},1,1)$ $(\sqrt{3},1,-2)$ $(3,1,-2)$ $(1,0,-1)$

$(2\sqrt{3},4,-2)$ $(4,1,0)$ $(3,5,2)$ $(\sqrt{3},1,-1)$ $(4,8,-10)$

ג. (6 נקודות) יהא M_1 המשטח $f(x,y)=z$ ויהא M_2 המישור $4x=\sqrt{3}(y+z)$.
נסמן ב־ $C=M_1\cap M_2$ את החיתוך של M_1 עם M_2.
יהא a קבוע ממשי. נתון כי המקסימום של הפונקציה

$$g(x,y,z)=\sin(ax)-2\sqrt{3}\sin(z)$$

על הקבוצה C מתקבל בנקודה q.
a שווה ל:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

-1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9

שאלה מס' 2

יהא S המשטח הנתון ע"י:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25 \ \ , z \geq 0\}$$

עם נורמל המכוון הלאה מהראשית.

א. (6 נקודות) השטח של S שווה ל:

64π	$50\pi^2$	81π	85π	90π	95π	$\frac{100\sqrt{3}\pi}{2}$
$\frac{200\pi}{3}$	$\frac{150\pi}{7}$	60π	55π	75π	80π	70π

ב. (6 נקודות) יהא G שדה וקטורי גזיר פעמיים ברציפות ב- $\mathbb{R}^3$. נתון כי השדה $F = \nabla \times G$ מקיים $F(x, y, 0) = (1, 2, 3)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.
$\int_S F \ d\sigma$ שווה ל:

9π	27π	18π	0	$50\pi^2$	75π	$\sqrt{3}\pi$	$\sqrt{18}\pi$
-9π	-27π	-18π	48π	$-50\pi^2$	-75π	$-\sqrt{3}\pi$	

ג. (6 נקודות) יהיו a, b, c קבועים ממשיים ויהא G השדה הווקטורי

$$G(x, y, z) = (axy, bz + z^2, cx) \ .$$

נתון כי <u>לכל</u> מסילה סגורה γ המוכלת במשטח S מתקיים $\int_\gamma G\, dr = 0$.
b שווה ל:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	

שאלה מס' 3

יהא A התחום ב־ $\mathbb{R}^3$ הנתון ע"י

$$A = \mathbb{R}^3 - \{(t,0,2t) : t \in \mathbb{R}\} .$$

יהא a קבוע ממשי. נגדיר שדה וקטורי F על A ע"י

$$F = \frac{(ay, 2x-z, y)}{(2x-z)^2 + 5y^2} .$$

נתון כי השדה F משמר מקומית ב־ A.

א. (6 נקודות) a שווה ל:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	

ב. (6 נקודות) תהא $\gamma_1 : [0,2\pi] \to A$ המסילה הנתונה ע"י $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.
$\int_{\gamma_1} F\, dr$ שווה ל:

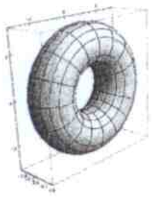
$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$	2π	π	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$	$-\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$	-2π	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	

ג. (6 נקודות) תהא $\gamma_2 : [0,2\pi] \to A$ המסילה הנתונה ע"י $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 3)$.
$\int_{\gamma_2} F\, dr$ שווה ל:

$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$	2π	π	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$	$-\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$	-2π	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	

שאלה מס' 4

יהא K הטורוס המלא המתקבל מסיבוב העיגול $D = \{(x,y,0) : x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$ סביב ציר ה־ x. תהא $S = \partial K$ השפה של K המכוונת מחוץ ל־ K.
תהא $T : [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to K$ פרמטריזציה של K הנתונה ע"י



$$T(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta, (2 + r\sin\theta)\cos\phi, (2 + r\sin\theta)\sin\phi) \quad .$$

יהא F השדה הווקטורי $F(x,y,z) = (2x, -4y, 3z)$.

א. (6 נקודות) היעקוביאן $J_T(r,\theta,\phi)$ של T שווה ל:

$r^2 \sin\phi$ $\quad$ $r^2 \sin\theta$ $\quad$ $4\pi r^2$ $\quad$ $r\sin\theta\sin\phi$ $\quad$ $2 + r\sin\theta$ $\quad$ $(2 + r\sin\theta)^2$

$r(2 + r\sin\theta)\sin\phi$ $\quad$ $r(2 + r\sin\theta)$ $\quad$ $(r^2 + 2)\cos\phi$ $\quad$ r $\quad$ $\sin\theta\cos\theta$

ב. (6 נקודות) $\int_S F\, d\sigma$ שווה ל:

0 $\quad$ π $\quad$ π^2 $\quad$ 2π $\quad$ $2\pi^2$ $\quad$ 3π $\quad$ $3\pi^2$ $\quad$ 4π $\quad$ $4\pi^2$ $\quad$ 5π $\quad$ $5\pi^2$

6π $\quad$ $6\pi^2$ $\quad$ 7π $\quad$ $7\pi^2$ $\quad$ 8π $\quad$ $8\pi^2$ $\quad$ 9π $\quad$ $9\pi^2$ $\quad$ 10π $\quad$ $10\pi^2$

ג. (6 נקודות) השטח של S שווה ל:

0 $\quad$ π $\quad$ π^2 $\quad$ 2π $\quad$ $2\pi^2$ $\quad$ 3π $\quad$ $3\pi^2$ $\quad$ 4π $\quad$ $4\pi^2$ $\quad$ 5π $\quad$ $5\pi^2$

6π $\quad$ $6\pi^2$ $\quad$ 7π $\quad$ $7\pi^2$ $\quad$ 8π $\quad$ $8\pi^2$ $\quad$ 9π $\quad$ $9\pi^2$ $\quad$ 10π $\quad$ $10\pi^2$

ד. (6 נקודות) האם קיימים שדות וקטוריים G ו־ H גזירים ברציפות ומשמרים על $\mathbb{R}^3$ המקיימים $G \times H = F$? נמק תשובתך.

שאלה מס' 5

תהא $f(x,y)$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות בתחום $K = \{(x,y) : x^2 - xy + y^4 \le 1\}$.
נתון כי אם $x^2 - xy + y^4 < 1$ אזי

$$3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) < 0 \quad .$$

תהא $p = (a,b)$ נקודת מינימום של $f(x,y)$ על K.

א. (5 נקודות) הוכח כי $a^2 - ab + b^4 = 1$.

ב. (6 נקודות) בטא את המנה

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(p)}{\frac{\partial f}{\partial y}(p)}$$

באמצעות a ו־ b (הנח כי $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \ne 0$).

א. נניח בשלילה שהמינימום $p=(a,b)$ נמצא בקבוצה הפתוחה $\mathrm{int}\,K = \{(x,y) : x^2 - xy + y^4 < 1\}$. אזי $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$.

כמובן $3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) < 0$ לכן או ש- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) < 0$ ואזי $y=b$ הוא נק' מקסימום מקומי של הפונ' $g(y) = f(a,y)$ ובפרט p <u>איננה</u> מינימום מקומי של $f(x,y)$. או ש- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$ ואזי $x=a$ היא נק' מקסימום מקומי של הפונ' $h(x) = f(x,b)$ ושוב p <u>איננה</u> מינימום מקומי של $f(x,y)$. סתירה. לכן $p=(a,b) \in \partial K$ כלומר $a^2 - ab + b^4 = 1$.

ב. לפי א. p היא נק' מינימום של $f(x,y)$ תחת האילוץ $g(x,y) = x^2 - xy + y^4 - 1 = 0$. לפי כלל כופלי לגרנז' קיים λ כך ש-

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right) = \nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b) = \lambda\,(2a-b, -a+4b^3)$$

ולכן

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(p)}{\frac{\partial f}{\partial y}(p)} = \frac{2a-b}{4b^3-a}$$

שאלה מס' 6

(11 נקודות) נסמן את אורכו של הווקטור (x,y,z) ב־ $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
יהא K התחום

$$K=\{(x,y,z): r(x,y,z)>1\}\ .$$

קבע עבור אילו מספרים ממשיים α האינטגרל

$$\int_K \frac{dx\,dy\,dz}{r(x,y,z)^\alpha}$$

מתכנס. חשב את ערך האינטגרל כאשר הוא מתכנס.

ע"י שימוש בקואורדינטות כדוריות

$$I(\alpha)=\int_K \frac{dx\,dy\,dz}{r^\alpha}=\int_{r=1}^{\infty}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{r^2\sin\phi}{r^\alpha}\,dr\,d\phi\,d\theta$$

$$=4\pi\int_{r=1}^{\infty}\frac{dr}{r^{\alpha-2}}$$

אם $\alpha-2\le 1$ אזי

$$I(\alpha)=4\pi\int_{r=1}^{\infty}\frac{dr}{r^{\alpha-2}}\geq 4\pi\int_{r=1}^{\infty}\frac{dr}{r}=4\pi\Big[\log r\Big]_{r=1}^{r=\infty}=\infty$$

אם $\alpha-2>1$ אזי

$$I(\alpha)=4\pi\int_{r=1}^{\infty}\frac{dr}{r^{\alpha-2}}=4\pi\left[\frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_{r=1}^{r=\infty}=4\pi\left[0-\frac{1}{3-\alpha}\right]=\frac{4\pi}{\alpha-3}$$

לכן

$$I(\alpha)=\begin{cases}\infty & \alpha\le 3\\[2mm] \dfrac{4\pi}{\alpha-3} & \alpha>3\end{cases}$$

1.א. u מקיים $\nabla f(p)\cdot u = \frac{1}{2}|\nabla f(p)| = 1$. נסמן ב-$\theta$ את הזוית בין $\nabla f(p)$ ל-u

אזי $\cos\theta = \dfrac{\nabla f(p)\cdot u}{|\nabla f(p)|\,|u|} = \dfrac{1}{2}$ ולכן $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

וקטור בזוית θ עם $\nabla f(p)$ נתון ע"י $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\nabla f(p)$.

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\nabla f(p) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix} \Rightarrow u = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} \quad \begin{bmatrix}\cos-\frac{\pi}{3} & -\sin-\frac{\pi}{3}\\ \sin-\frac{\pi}{3} & \cos-\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\nabla f(p) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{bmatrix} \Longrightarrow u = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

ב. נסמן $h(x,y,z) = f(\sqrt{3}(x+y), 5x-y) - \sin 2z$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,\frac{\partial\sqrt{3}(x+y)}{\partial x}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,\frac{\partial(5x-y)}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + 1\cdot 5 = 8$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,\frac{\partial\sqrt{3}(x+y)}{\partial y}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,\frac{\partial(5x-y)}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + 1\cdot(-1) = 2$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}(0,0,0) = -2\cos 2z\Big|_{(0,0,0)} = -2 \Rightarrow \nabla h(q) = (8,2,-2) = 2(4,1,-1)$$

ג. נסמן $\varphi_1(x,y,z) = f(x,y) - z$, $\varphi_2(x,y,z) = 4x - \sqrt{3}(y+z)$.

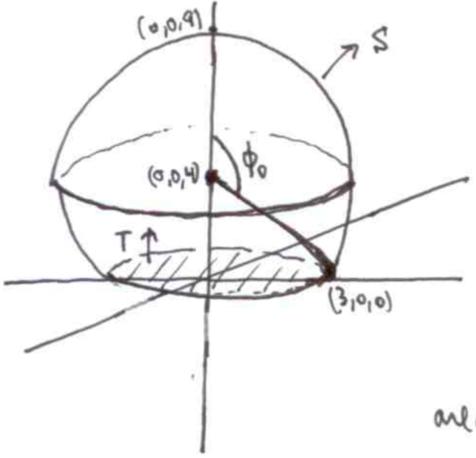
$$\nabla g(0,0,0) = (a\cos ax, 0, -2\sqrt{3}\cos z)\big|_{(0,0,0)} = (a, 0, -2\sqrt{3})$$

$\nabla\varphi_1(0,0,0) = (\sqrt{3}, 1, -1)$. $\quad \nabla\varphi_2(0,0,0) = (4, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

בנקודת המקסימום q מתקיים $\nabla g(q) = \alpha_1\nabla\varphi_1(q) + \alpha_2\nabla\varphi_2(q)$

ולכן

$$0 = \det\begin{bmatrix}\nabla\varphi_1(q)\\ \nabla\varphi_2(q)\\ \nabla g(q)\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & -1\\ 4 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ a & 0 & -2\sqrt{3}\end{bmatrix} = 14\sqrt{3} - 2\sqrt{3}a \Rightarrow a = 7$$



2. א. S היא ספירה קטומה ברדיוס $R=5$,

החותכת את מישור ה-(x,y) במעגל $x^2+y^2=9$

$$\cos\phi_0 = \frac{(0,0,1)\cdot((3,0,0)-(0,0,4))}{|(3,0,-4)|} = -\frac{4}{5}$$

לכן

$$\text{area}(S) = \int_{\phi=0}^{\phi_0}\int_{\theta=0}^{2\pi} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= 25\cdot 2\pi \int_{\phi=0}^{\phi_0} \sin\phi \, d\phi = -50\pi(\cos\phi_0 - \cos 0)$$

$$= -50\pi\left(-\frac{4}{5}-1\right) = 90\pi$$

ב. נסמן ב-T את העיגול $T=\{(x,y,0):\ x^2+y^2\le 9\}$ עם נורמל בכוון ציר z

התחום (נסמן) $K=\{(x,y,z):\ z\ge 0,\ x^2+y^2+(z-4)^2\le 25\}$. אזי

$$\int_S F - \int_T F = \int_{\partial K} F\, d\sigma = \int_K \text{div}\, F = \int_K \text{div}\, \nabla\times G = \int_K 0 = 0$$

לכן

$$\int_S F\, d\sigma = \int_T F\, d\sigma = \text{area}(T)\cdot\left[(0,0,1)\cdot(1,2,3)\right]$$

$$= 3\ \text{area}(T) = 27\pi$$

ג. הנורמל $N(p)$ ל-S בנקודה $p=(x,y,z)$ הוא $(x,y,z-4)$.

אם קיימת נקודה $p\in S$ כך ש- $\nabla\times G(p)\cdot N(p)\neq 0$, נניח $\nabla\times G(p)\cdot N(p)>0$

אזי נבחר כיפה קטנה M סביב p כך ש $0<\nabla\times G(u)\cdot N(u)$

לכל $u\in M$, ואז:

$$\int_{\partial M} G\, dr = \int_M \nabla\times G\, d\sigma = \int_{u\in M} \nabla\times G(u)\cdot N(u) > 0.$$

לכן $\nabla\times G(p)\cdot N(p)=0$ לכל $p\in S$.

$$\nabla\times G(x,y,z) = \begin{matrix} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \times & & & \\ & (axy, & bz+z^2, & cx) \end{matrix} = (-b-2z, -c, -ax)$$

$$0 = (-b-2z, -c, -ax)\cdot(x, y, z-4) =$$ לכן

$$(4a-b)x - cy - (a+2)xz \quad \Rightarrow \quad a=-2 \quad \Rightarrow b=4a=-8$$

3. א. F משמר מקומית $\Longleftrightarrow$ $\nabla\times F=0$. [illegible] נבדוק לתנאים

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x-z}{(2x-z)^2+5y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ay}{(2x-z)^2+5y^2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x-z}{(2x-z)^2+5y^2}\right) &= \frac{-2(2x-z)^2+10y^2}{((2x-z)^2+5y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ay}{(2x-z)^2+5y^2}\right) &= \frac{a(2x-z)^2-5ay^2}{((2x-z)^2+5y^2)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=-2$$

ג. המסילה γ_1 הומוטופית ב-A לאליפסה $\Gamma_1:[0,2\pi]\to A$

הנתונה ע"י $\Gamma_1(t)=(\sqrt{5}\cos t, 2\sin t, 0)$. לכן

$$\int_{\gamma_1} F\,dr \overset{F \text{ משמר מקומית}}{=} \int_{\Gamma_1} F\,dr = \int_{t=0}^{2\pi} F(\Gamma_1(t))\cdot\dot{\Gamma}_1(t)\,dt =$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{(-2(2\sin t), 2(\sqrt{5}\cos t), 2\sin t)}{(2(\sqrt{5}\cos t))^2+5(2\sin t)^2}\cdot(-\sqrt{5}\sin t, 2\cos t, 0)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{4\sqrt{5}}{20}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

ד. המסילה γ_2 הומוטופית לנקודה ב-A לכן

$$\int_{\gamma_2} F\,dr = 0.$$

4.א.

$$J_T(r,\theta,\phi) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta & r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi \\ 0 & -(2+r\sin\theta)\sin\phi & (2+r\sin\theta)\cos\phi \end{bmatrix} = r(2+r\sin\theta)$$

ב.

$$\int_S F\,d\sigma = \int_K \operatorname{div} F = \int_K 1 = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} (2r + r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} 2r\,dr\,d\theta\,d\phi = 4\pi^2$$

ג. תהא $\varphi: [0,2\pi]^2 \to S$ הפרמטריזציה של S הנתונה ע"י:

$$\varphi(\theta,\phi) = T(1,\theta,\phi) = (\cos\theta, (2+\sin\theta)\cos\phi, (2+\sin\theta)\sin\phi)$$

$$N_\varphi(\theta,\phi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = \begin{array}{l} (-\sin\theta \quad \cos\theta\cos\phi \quad \cos\theta\sin\phi) \\ \times \\ (0 \quad -(2+\sin\theta)\sin\phi \quad (2+\sin\theta)\cos\phi) \\ \hline (2+\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi) \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{area } S = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} |N_\varphi(\theta,\phi)|\,d\theta\,d\phi = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} (2+\sin\theta)\,d\theta\,d\phi$$

$$= 2\cdot 2\pi\cdot 2\pi = 8\pi^2$$