בוחן בקומבינטוריקה 104286 – 9.12.14

משך הבוחן שעתיים. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל ארבע השאלות. **בהצלחה!**

1. שני סעיפי השאלה אינם קשורים זה לזה.

א. (12 נקודות) מצא את מספר הזוגות הסדורים (A,B) של קבוצות $A,B\subset\{1,\dots,n\}$ כך שגודל חיתוכן $|A\cap B|$ הוא זוגי.
הערה: כתוב את התשובה כביטוי פשוט שאינו כולל סכום (Σ).

ב. (13 נקודות) הוכח (בדרך קומבינטורית או אחרת):

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

2. נסמן ב־ a_n את מספר האופנים לחלק n עוגיות (זהות) ל־ 100 תלמידים (שונים) כך שכל תלמיד יקבל לכל היותר 10 עוגיות.
שים לב כי $a_n=0$ עבור $n\geq 1001$.

א. (12 נקודות) מצא ביטוי פשוט לפונקציה היוצרת $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

ב. (13 נקודות) מצא ביטוי מפורש ל־ a_n.

3. n ילדי גן ששיחקו במים תולים את גרביהם הרטובים ליבוש. בסוף היום הגננת מחלקת את $2n$ הגרביים חזרה לילדים.

א. (5 נקודות) נסמן ב־ a_n את מספר האופנים לחלק את $2n$ הגרביים לילדים כך שכל ילד יקבל שני גרביים.
(שים לב: ילד יכול לקבל שני גרביים ששניהם שייכים לילד מסויים או שני גרביים שאחד שייך לילד אחד והשני לילד אחר).
למשל, $a_1 = 1$ ו־ $a_2 = 6$.
מצא ביטוי מפורש ל־ a_n.

ב. (5 נקודות) כתוב את נוסחת ההכלה וההדחה.

ג. (15 נקודות) נסמן ב־ b_n את מספר האופנים לחלק את $2n$ הגרביים לילדים כך שכל ילד יקבל שני גרביים (כמו בסעיף א') שמתוכם <u>לפחות</u> אחד <u>אינו</u> שלו.
למשל, $b_1 = 0$ ו־ $b_2 = 5$.
מצא ביטוי מפורש ל־ b_n.

4. נסמן ב־ u_n את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהאותיות A, B, C, שבהן האות C אינה מופיעה פעמיים (או יותר) ברצף.
למשל, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 8$, $u_3 = 22$.

א. (12 נקודות) מצא נוסחת נסיגה ל־ u_n.

ב. (13 נקודות) מצא נוסחא מפורשת ל־ u_n.

1. א.

$$\left|\{(A,B) : 2 \mid |A\cap B|,\ A,B\subset [n]\}\right| = \sum_{i\geq 0} \left|\{(A,B) : |A\cap B| = 2i,\ A,B\subset [n]\}\right| =$$

$$= \sum_{i\geq 0}\binom{n}{2i} 3^{n-2i} = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\frac{1+(-1)^k}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}(-1)^k$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^n + 2^n\right)$$

ב. תה"נה A_0, B_0 קבוצות זרות $|A_0| = |B_0| = n$. אז:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \left|\{(a, A, B) : a\in A\subset A_0,\ B\subset B_0\ \ |A|+|B| = n\}\right|$$

$$= \sum_{a\in A}\left|\{C : a\in C\subset A_0\cup B_0\}\right| = n\cdot\binom{2n-1}{n-1}$$

2. א.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{i=0}^{10} x^i\right)^{100} = \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^{100}$$

ב.

$$\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^{100} = (1-x^{11})^{100}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+99}{99}x^l =$$

$$= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(-1)^k x^{11k}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+99}{99}x^l$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{100}{k}\binom{n-11k+99}{99}\right]x^n$$

לכן

$$a_n = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{100}{k}\binom{n-11k+99}{99}$$

הערה: אפשר לפתור את סעיף ב' גם ע"י נוסחת ההכלה וההדחה.