מבחן בקומבינטוריקה 104286 – 17.2.15

משך המבחן שלוש שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

1. **יהא** $1 \le i \le n-1$. **נסמן ב־** P_i **את אוסף כל התמורות על** $\{1,\ldots,n\}$ **שבהן** $i+1$ **מופיע מיד אחרי** i.

א. (3 **נקודות) חשב את** $|P_i|$.

ב. (4 **נקודות) יהא** $n \ge 6$. **חשב את גדלי החיתוכים** $|P_1 \cap P_2 \cap P_3|$, $|P_1 \cap P_2 \cap P_4|$ **ו־** $|P_1 \cap P_3 \cap P_5|$.

ג. (7 **נקודות) תהא** $I \subset \{1,\ldots,n-1\}$ **קבוצה בגודל** k.
חשב את גודל החיתוך $|\bigcap_{i\in I} P_i|$.

ד. (6 **נקודות) חשב את מספר התמורות על** $\{1,\ldots,n\}$ **בהן** <u>**לכל**</u> $1 \le i \le n-1$ **מתקיים ש־** $i+1$ <u>**אינו**</u> **מופיע מיד לאחר** i.

2. **א.** (5 **נקודות) נסח את משפט** Hall **על קיום זיווג מושלם בגרף דו־צדדי.**

ב. (15 **נקודות) יהיו** $A_1,\ldots,A_n$ **קבוצות סופיות כך שלכל** $I \subset \{1,\ldots,n\}$ **מתקיים** $|\bigcup_{i\in I} A_i| \ge 3|I|$.
הוכח כי קיימות קבוצות $B_1,\ldots,B_n$ **כך ש־** $|B_i| = 3$ **ו־** $B_i \subset A_i$ **לכל** $1 \le i \le n$**, וכך ש־** $B_i \cap B_j = \emptyset$ **לכל** $1 \le i < j \le n$.

3. **א.** (14 **נקודות) יהיו** $a_1,\ldots,a_{10}$ **מספרים שלמים. הוכח כי קיימים** $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{10} \in \{-1,0,1\}$ **שאינם כולם** 0**, כך שהסכום** $\sum_{i=1}^{10} \epsilon_i a_i$ **מתחלק ב־** 1023.

ב. (6 **נקודות) מצא שלמים** $a_1,\ldots,a_{10}$ **כך שלכל** $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{10} \in \{-1,0,1\}$ **שאינם כולם** 0**, הסכום** $\sum_{i=1}^{10} \epsilon_i a_i$ <u>**אינו מתחלק**</u> **ב־** 1024.

4. יהא $n \geq 0$. נסמן ב־ a_n את מספר השלשות (x,y,z) של מספרים טבעיים אי־שליליים המקיימים $x+y+2z=n$.

א. (10 נקודות) חשב את הפונקציה היוצרת $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

ב. (10 נקודות) מצא ביטוי מפורש ל־ a_n.
<u>הערה:</u> כתוב את התשובה כביטוי פשוט שאינו כולל סכום ($\sum$).

ג. <u>בונוס:</u> (5 נקודות) האם קיימים קבועים c_1,c_2,c_3,c_4 כך שמתקיים

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + c_4 a_{n-4}$$

לכל $n \geq 4$? אם כן, מצא קבועים אלה.

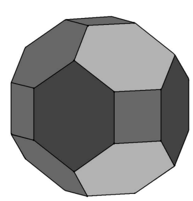
5. יהא P פיאון תלת־מימדי עם f_0 קדקדים, f_1 צלעות ו־ f_2 פיאות.

א. (10 נקודות) הוכח כי אם P <u>אינו מכיל</u> פיאות משולשות אזי

$$f_1 \leq 2f_0 - 4 \quad .$$

<u>הערה:</u> אפשר להסתמך על נוסחת אוילר.

ב. (10 נקודות) נניח עתה כי P מכיל פיאות מרובעות ומשושות בלבד. נתון כי P מכיל 6 פיאות מרובעות וכי $f_0=32$. חשב (על סמך נתונים אלה בלבד!) את f_1 ואת f_2.



1. ג. נראה כי $|\bigcap_{i\in I} P_i| = (n-k)!$.

נניח כי I הינה איחוד של t רצפים באורכים $l_1,\dots,l_t$:

$$I=[i_1,i_1+l_1-1]\cup[i_2,i_2+l_2-1]\cup\dots\cup[i_t,i_t+l_t-1]$$

כאשר $\sum_{j=1}^{t} l_j=k$ וכן ש- $i_j+l_j<i_{j+1}$ לכל $1\le j\le t-1$.

נסמן $B_j=[i_j,i_j+l_j]$. אזי $\pi\in\bigcap_{i\in I}P_i$ אמ"מ הבלוקים $B_1,\dots,B_t$ מופיעים ברצף כל אחד. לכן אפשר לזהות כל $\pi\in\bigcap_{i\in I}P_i$ עם תמורה על הקבוצה $C=\{B_j\}_{j=1}^{t}\cup\left([n]-\bigcup_{j=1}^{t}B_j\right)$ שמס' איבריה הוא

$$|C|=t+n-\sum_{j=1}^{t}(l_j+1)=n-\sum_{j=1}^{t}l_j=n-k$$

לכן

$$|\bigcap_{i\in I}P_i|=|C|!=(n-k)!$$

ד. לפי נוסחת ההכלה וההדחה, מס' התמורות בהן אין זוג $(i,i+1)$ המופיע ברצף הוא

$$n!-|\bigcup_{i=1}^{n}P_i|=n!-\sum_{\emptyset\ne I\subset[n]}(-1)^{|I|+1}|\bigcap_{i\in I}P_i|=$$

$$=n!-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}(n-k)!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

2. ב. נגדיר גרף דו-צדדי G עם צדדים

$$U=\{u_{11},u_{12},u_{13}\}\cup\dots\cup\{u_{n1},u_{n2},u_{n3}\}$$

$$V=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

ובדרגות $(u_{ij},v)\in G$ אםם $v\in A_i$.

נראה כי ב-G יש זיווג המכסה את כל קדקדי U. ניקח תת קבוצה $U_0\subset U$

ונסמן $I=\{i\in[n]: \exists j\ u_{ij}\in U_0\}$. אזי

$$|\Gamma_G(U_0)| = \Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| \ge 3|I| \ge |U_0|.$$

לכן לפי משפט Hall יש זיווג ב-G $\{(u_{ij},v_{ij})\}_{i=1,j=1}^{n\ \ \ 3}$

נגדיר $B_i=\{v_{i1},v_{i2},v_{i3}\}$. אזי $B_i\subset A_i$ זרות בזוגות ו-$|B_i|=3$

א. לכל $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{10})\in\{0,1\}^{10}$ נגדיר $c_\alpha=\sum_{i=1}^{10}\alpha_i a_i$

מאחר ו- $1023 < 2^{10}=1024$ אזי לפי עקרון היונים יש $\alpha\ne\beta\in\{0,1\}^{10}$

כך ש- $c_\alpha\equiv c_\beta\ (1023)$. נסמן $\varepsilon=\alpha-\beta\in\{-1,0,1\}^{10}$ אזי

$$\sum_{i=1}^{10}\varepsilon_i a_i = c_\alpha - c_\beta \equiv 0\ (1023).$$

ב. נקח לדוגמא $a_i=2^{i-1}$, $1\le i\le 10$.

א.

$$f(t)=\Big(\sum_{i=0}^{\infty} t^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} t^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}\Big) = \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)}$$

ב. אם קבענו מראש את $0\le z\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ אזי מס' האפשרויות לבחור (x,y) הוא $n-2z+1$. לכן

$$a_n=\sum_{z=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(n-2z+1) = (n+1)\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right) - 2\,\frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\right)}{2} = \left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor+n+1$$

ג.

$$f(t)=\frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)} = \frac{1}{1-(2t-2t^3+t^4)}$$

לכן $a_n = 2a_{n-1}-2a_{n-3}+a_{n-4}$ עבור $n\ge 4$.

5. ב. נסמן ב- α_i את מספר הפאות עם i צלעות. אזי

$$f_2 = \alpha_4 + \alpha_6 = 6 + \alpha_6$$

$$2f_2 = 12 + 2\alpha_6$$

כמו כן

$$2f_1 = \sum_i i\alpha_i = 4\alpha_4 + 6\alpha_6 = 24 + 6\alpha_6$$

לפי נוסחת אוילר

$$4 = 2(f_0 - f_1 + f_2) = 2\cdot 32 - (24 + 6\alpha_6) + 12 + 2\alpha_6 = 52 - 4\alpha_6$$

$$\Leftarrow \quad \alpha_6 = 12 \quad \Leftarrow \quad \boxed{f_2 = \alpha_4 + \alpha_6 = 18}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_1 = 12 + 3\alpha_6 = 12 + 36 = 48}$$