$$f(n)=\left|\left\{(x_1,\dots,x_k):\ 0\le x_i\le b,\ \sum_{i=1}^{k}x_i=n\right\}\right|$$ 1. א.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,t^n = \left(1+t+\dots+t^b\right)^k = \left(\frac{1-t^{b+1}}{1-t}\right)^k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,t^n = \frac{(1-t^{b+1})^k}{(1-t)^k} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+k-1}{k-1}t^i \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}t^{(b+1)j} =$$ ב.

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{\substack{(i,j)\\ i+j(b+1)=n}}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{i+k-1}{k-1}\right]t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-j(b+1)+k-1}{k-1}\right]t^n$$

לכן

$$f(n)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-j(b+1)+k-1}{k-1}$$

הוכחה נוספת בעזרת הכלה והדחה:

נסמן

$$A_i=\left\{(x_1,\dots,x_k):\ \sum_{j=1}^{k}x_j=n,\ \ x_i\ge b+1\right\}$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le k}\left|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_j}\right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}\binom{n-j(b+1)+k-1}{k-1}$$

לכן

$$f(n)=\binom{n+k-1}{k-1}-\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right| = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-j(b+1)+k-1}{k-1}$$

2. א.

$\longleftrightarrow \quad (3,5,2,4,4,5)$

ב. נסמן ב- n_1 = מס' הקדקודים מדרגה 1

n_3 = " " " 3.

אזי

$$n_1+n_3 = n = 2m$$

$$n_1+3n_3 = 2|E| = 2(n-1)$$

$\Leftarrow \quad 2n_3 = 2(n-1)-n = n-2 \quad \Leftarrow \quad (n_1,n_3)=(m+1,m-1)$.

לכן מס' העצים הנ"ל הוא

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-2}{\underbrace{0,\dots,0}_{n_1};\underbrace{2,\dots,2}_{n_3}} = \binom{2m}{m+1}\cdot\frac{(2m-2)!}{2^{m-1}}$$

3. ב. נגדיר גרף דו-צדדי עם הצדדים $A=\binom{[n]}{k}$, $B=\binom{[n]}{k+1}$

כאשר $F\in A$ מחובר ל- $G\in B$ אם $F\subset G$.

עלינו להראות כי בגרף זה יש זיווג את A לתוך B.

ואמנם $\deg F = n-k \geq k+1 = \deg G$ לכל $F\in A$, $G\in B$.

ולכן לפי טענה שהראנו בכיתה יש בגרף זיווג כנ"ל.

הוכחה ישירה: תהא $\mathcal{F}\subset A$ קבוצת קדקודים בגרף.

ונסמן $\Gamma(\mathcal{F})\subset B$ את קבוצת שכניו של $\mathcal{F}$.

אזי $|\mathcal{F}|\cdot(n-k) = |\{(F,G)\in\mathcal{F}\times B : F\subset G\}| \leq |\Gamma(\mathcal{F})|\cdot(k+1)$

ולכן

$$|\Gamma(\mathcal{F})| \geq |\mathcal{F}|\,\frac{n-k}{k+1} \geq |\mathcal{F}|$$

ולכן יש זיווג של A, לפי משפט Hall.

4. א. ⇐ ב. אינדוקציה על $k+l$. בסיס האינדוקציה $R(1,l)=R(l,1)=l<2^{1+l}$.

$$R(k,l) \le R(k-1,l)+R(k,l-1) \le 2^{k-1+l}+2^{k+l-1} = 2^{k+l}$$

ג. יהיו $N = R(k+1,k+1)-1$, $n=R(k+1,k+1)$.

נגדיר צביעה $\varphi: E(K_n)\to\{1,2\}$ ע"י:

$$\varphi(\{i,j\}) = \begin{cases} 1 & |j-i| \in A_1 \\ 2 & |j-i| \in A_2 \end{cases}$$

לפי בחירת n, K_n מכיל K_{k+1} חד-צבעי, כלומר קיימים

$j_1<\dots<j_{k+1}$ ו- $i\in\{1,2\}$ כך ש- $j_t - j_s \in A_i$ לכל

$1\le s<t\le k+1$. נסמן $x_l = j_{l+1}-j_l$ אזי

$x_1,\dots,x_k \in A_i$ וגם $x_1+\dots+x_k = j_{k+1}-j_1 \in A_i$.

5. יהיו $(v,e,f) = $ (# קודקודים, # צלעות, # פאות).

אזי $3v=2e=2\cdot 36=72 \Leftarrow v=24$

מנוסחת אוילר $2=v-e+f=24-36+f$

ולכן $f=14$.

נסמן $f_i = $ מס' פאות שלהן מצולעים מסדר i.

אזי
$$\begin{cases} f_4+f_6=14 \\ 4\cdot f_4+6f_6=2e=72 \end{cases} \Rightarrow f_6=8$$