מבחן בקומבינטוריקה 104286 – 28.2.13

משך המבחן שלוש שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

סימון: למספר טבעי $n \geq 1$ נסמן $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

1. יהיו $k, b \geq 1$ טבעיים קבועים.
למספר טבעי n נסמן ב־ $f(n)$ את מספר הפתרונות $x = (x_1, \ldots, x_k)$ למשוואה
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$
כאשר $x_i \in \{0, 1, \ldots, b\}$ לכל $1 \leq i \leq k$.

א. (10 נקודות) חשב את הפונקציה היוצרת $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) t^n$.

ב. (10 נקודות) מצא ביטוי מפורש ל־ $f(n)$.

2. א. (8 נקודות) מצא את העץ הפורש על הקדקדים $\{1, \ldots, 8\}$ שסדרת Prüfer שלו היא $(3, 5, 2, 4, 4, 5)$.

ב. (12 נקודות) יהא $n = 2m$ מספר זוגי. חשב את מספר העצים T על קבוצת הקדקדים $[n]$ כך שדרגת כל קדקד ב־ T היא 1 או 3 .

3. א. (8 נקודות) נסח את משפט Hall על קיום זיווג בגרף דו־צדדי.

ב. (12 נקודות) יהיו $n, k \geq 1$ טבעיים כך ש־ $k < \frac{n}{2}$.
תהא $\{F_1, \ldots, F_{\binom{n}{k}}\}$ משפחת כל הקבוצות בגודל k מתוך $[n]$.
הוכח כי קיימות $\binom{n}{k}$ קבוצות <u>שונות</u> $G_1, \ldots, G_{\binom{n}{k}}$ המוכלות ב־ $[n]$ כך שלכל $1 \leq i \leq \binom{n}{k}$ מתקיים $|G_i| = k + 1$ וכן $F_i \subset G_i$.

4. מספר רמזי $n = R(k,\ell)$ הוא ה־ n המינימלי כך שאם צובעים את צלעות הגרף השלם K_n באדום וכחול, אזי או שיש תת־גרף שלם על k קודקודים שכל צלעותיו אדומות, או שיש תת־גרף שלם על ℓ קודקודים שכל צלעותיו כחולות.

א. (6 נקודות) הוכח כי לכל $k,\ell \geq 2$

$$R(k,\ell) \leq R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1) \quad .$$

ב. (4 נקודות) הסק מסעיף א' כי $R(k,\ell) \leq 2^{k+\ell}$.

ג. (10 נקודות) הוכח כי לכל k טבעי קיים מספר $N = N(k)$ (התלוי ב־ k) כך שלכל חלוקה $[N] = A_1 \cup A_2$ קיים $i \in \{1,2\}$ וקיימים $x_1,\ldots,x_k \in A_i$ (לאו דווקא שונים) כך שגם $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \in A_i$.

5. א. (10 נקודות) כתוב והוכח את נוסחת אוילר על הקשר בין מספרי הקדקדים, הצלעות והפיאות בפיאון תלת־מימדי.

ב. (10 נקודות) יהא Q פיאון ב־ $\mathbb{R}^3$. נתון כי ל־ Q יש 36 צלעות וכי כל קדקד של Q נמצא על 3 צלעות. נתון גם כי Q מכיל פיאות מרובעות ומשושות בלבד.
חשב את מספר הפיאות המשושות של Q.