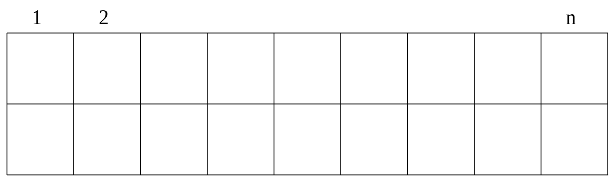
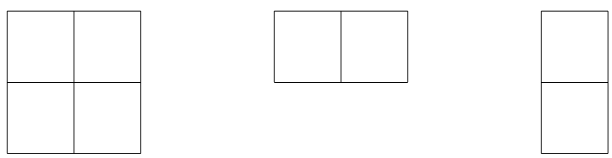
מבחן בקומבינטוריקה 104286 – 14.7.10

משך המבחן שלוש שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

סימון: יהא $G=(V,E)$. דרגת הקדקד $v \in V$ תסומן $deg_G(v)$.

1. נתון מלבן שמידותיו $2\times n$. ברשותך מלאי (בלתי מוגבל) של אריחים משלושה סוגים: רבועים של 2×2, מלבנים של 1×2 ומלבנים של 2×1.





נסמן ב־ a_n את מספר האופנים לרצף (ללא חפיפות) את כל המלבן שמידותיו $2\times n$ ע"י האריחים הנ"ל. למשל: $a_1=1$, $a_2=3$ ו־ $a_3=5$.

א. (10 נקודות) כתוב נוסחת נסיגה לסדרה a_n.

ב. (10 נקודות) מצא ביטוי מפורש ל־ a_n כפונקציה של n.

2. א. (10 נקודות) מצא את העץ הפורש על הקדקדים $\{1,\ldots,8\}$ שסדרת Prüfer שלו היא $(8,1,4,2,4,4)$.

ב. (10 נקודות) יהא $n\geq 10$. מצא את מספר העצים הפורשים G על הקדקדים $\{1,\ldots,n\}$ המקיימים $\deg_G(1)=\deg_G(2)=5$.

3. א. (10 נקודות) יהא $G=(V,E)$ גרף דו־צדדי שצדדיו הן הקבוצות A ו־ B ומתקיים $|A|=|B|=n$. נתון כי $\deg_G(v) \geq \frac{n}{2}$ לכל קדקד $v \in V$. הוכח כי G מכיל זיווג מושלם (כלומר n צלעות זרות).

ב. (10 נקודות) לכל n זוגי, תן דוגמא לגרף דו־צדדי $G=(V,E)$ שצדדיו A ו־ B מקיימים $|A|=|B|=n$, כך ש־ $\deg_G(v) \geq \frac{n}{2}-1$ לכל קדקד $v \in V$, וכך ש־ G <u>אינו</u> מכיל זיווג מושלם.

4. מספר רמזי $n=R(k,\ell)$ הוא ה־ n המינימלי כך שאם צובעים את צלעות הגרף השלם K_n באדום וכחול, אזי או שיש תת־גרף שלם על k קודקודים שכל צלעותיו אדומות, או שיש תת־גרף שלם על ℓ קודקודים שכל צלעותיו כחולות.

א. (10 נקודות) הוכח כי $R(k,\ell) \leq R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)$.

ב. (10 נקודות) הוכח כי $R(3,4) \leq 9$.

5. א. (8 נקודות) יהא $G=(V,E)$ גרף מישורי עם v קדקדים, e צלעות ו־ f פיאות (כולל הפיאה האינסופית). כתוב <u>והוכח</u> את נוסחת אוילר לקשר בין v, e ו־ f.

ב. (12 נקודות) בכדורגל (מסורתי) K יש 12 פיאות מחומשות ו־ 20 פיאות משושות. חשב (על סמך נתונים אלה בלבד!) את מספר הצלעות ואת מספר הקדקדים ב־ K.