פתרון לשאלות 1 ו- 2 בבחן.

1. תהי A בת N מספרים שונים ונניח כי $k|N$.

באלגוריתם $Part(A, N, k)$ שלהלן מוצגת חלוקה $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$

$|A_i| = \frac{N}{k}$, כך שלכל $1 \le i < j \le k$ ו- $x \in A_i, y \in A_j$ מתקיים $x<y$.

$Part(A, N, k)$

(i) נמצא את האיבר ה- $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \frac{N}{k}$ - הקטן ביותר ב- A ע"י אלגוריתם הבחירה. נסמן איבר זה ב- x.

(ii) נמצא את $B = \{y \in A : y \le x\}$, $C = \{y \in A : y > x\}$.

(iii) נקרא ברקורסיה ל- $Part(B, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \frac{N}{k}, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$.

(iv) נקרא ברקורסיה ל- $Part(C, \lceil \frac{k}{2} \rceil \frac{N}{k}, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$.

נסמן ב- $f(N,k)$ את מס' ההשוואות שבוצעו ב- $Part(A,N,k)$.

אלגוריתם הבחירה בסעיף (i) מבצע $\le cN$ השוואות.

מס' ההשוואות ב-(ii) הוא $\le N$. לכן

$$f(N,k) \le (c+1)N + f\left(\frac{N}{k} \cdot \lfloor \tfrac{k}{2} \rfloor, \lfloor \tfrac{k}{2} \rfloor\right) + f\left(\frac{N}{k} \cdot \lceil \tfrac{k}{2} \rceil, \lceil \tfrac{k}{2} \rceil\right).$$

נסמן $c' = c+1$ אזי

טענה: אם $k = 2^m$ אזי $f(N,k) \le c' N \log_2 k$

הוכחה: באינדוקציה על N ו- k :

$$f(N,k) \le c'N + 2f\left(\frac{N}{2}, \frac{k}{2}\right) \le c'N + 2\left(c'\frac{N}{2}\log_2\frac{k}{2}\right) = c'N\log_2 k \, .$$

מהטענה נובע כי עבור k כללי : $f(N,k) \le 4c' N \log_2 k$.

חסם תחתון : מספר העלים בעץ ההשוואות של אלגוריתם כלשהו

למציאת חלוקה כנ"ל הינו $\ge$ מס' החלוקות השונות $(C_1, \ldots, C_k)$ של

$\{1,\ldots,N\}$ ל- k קבוצות זרות בגודל $|C_i| = \frac{N}{k}$, דהיינו

$$\binom{N}{\frac{N}{k}; \ldots ; \frac{N}{k}} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{k}\right)!^{k}}$$

לכן עומק העץ הנ"ל הוא לפחות

$$\log_2 \frac{N!}{\left(\frac{N}{k}\right)!^k} = \log_2 N! - k\log_2\left(\frac{N}{k}\right)! \ge N\log_2 k - CN$$

2. א. G קשיר עם פונ' משקל w על הצלעות.

טענה: אם בכל מעגל פשוט ב- G , כל הצלעות בעלות משקל שונה ,

אזי G מכיל עץ פורש מינימלי יחיד.

הוכחה: נניח $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$ שני עצים פורשים מינימליים

שונים. תהי $e\in(E_1-E_2)\cup(E_2-E_1)$ צלע המקיימת

$$w(e) = \min\{w(f) : f\in(E_1-E_2)\cup(E_2-E_1)\}$$

נניח בה"כ כי $e\in E_1$.

הגרף T_2+e מכיל מעגל פשוט C. ברור כי C מכיל צלע $f\in E_2-E_1$ (אחרת T_1 מכיל מעגל). מבחירת e נובע כי $w(e)\le w(f)$, ולכן מההנחה נובע כי $w(e)<w(f)$.
הגרף $T_3=(V, E_2-\{f\}\cup\{e\})$ הוא עץ פורש המקיים $w(T_3)<w(T_2)$, סתירה.

ב. <u>טענה</u>: יהי $G=(V,E)$ קשיר עם משקל w על הצלעות.
אם אין ב-G 3 צלעות שוות משקל, אזי מספר העצים הפורשים המינימליים $\le 2^{|V|-2}$.

<u>הוכחה</u>: יהי $T=(V,E_0)$ העץ הפורש המינימלי המתקבל מאלגוריתם קרוסקל, ונסמן $E_0=\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ כאשר $w_1=w(e_1)\le\dots\le w_{n-1}=w(e_{n-1})$.
נסתמך על הטענות הבאות שהוכחו בשעור:
(i) אם $F=\{f_1,\dots,f_{n-1}\}$ עפ"מ עבור $w(f_1)\le\dots\le w(f_{n-1})$ אזי $w(f_i)=w_i$ לכל $1\le i\le n-1$.
(ii) לכל $1\le k\le n-1$, $\{f_1,\dots,f_k\}$ יער עם k צלעות בעל משקל מינימלי.
עתה: לכל עפ"מ F כנ"ל נתאים את הסדרה
$$\varphi(F)=(f_2,\dots,f_{n-1})\in E^{n-2}.$$
נראה כי ההתאמה φ חח"ע. ואמנם נניח $F'=\{g_1,\dots,g_{n-1}\}$ עפ"מ עם $w(g_1)\le\dots\le w(g_{n-1})$ המקיים $(g_2,\dots,g_{n-1})=\varphi(F')=\varphi(F)=(f_2,\dots,f_{n-1})$.
לפי (i) $w(f_1)=w(g_1)=w_1$. אם $f_1\ne g_1$ אזי $\{f_1,g_1\}$ יער מינימלי עם 2 צלעות. אבל $w(f_1)=w(g_1)<w(f_2)$, וזו סתירה לכך שלפי (ii) $\{f_1,f_2\}$ יער מינימלי עם שתי צלעות. לכן φ חח"ע. לכן

מס' עפ"מ ב-G $\le \left|\{(u_2,\dots,u_{n-1})\in E^{n-2}: w(u_i)=w_i\}\right| \le 2^{n-2}$