מבחן באלגוריתמים קומבינטוריים 104291 — $5.2.2016$

משך המבחן שלוש שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

1. נתונות k קבוצות זרות וממויינות של מספרים ממשיים $A_1, \ldots, A_k$ כך ש־ $\sum_{i=1}^{k} |A_i| = N$.

א. (10 נקודות) תן אלגוריתם השוואות יעיל ככל האפשר למיון $\cup_{i=1}^{k} A_i$ ונתח את סיבוכיותו.

ב. (10 נקודות) נניח כי $|A_i| = i$ לכל $1 \leq i \leq k$. האם קיים אלגוריתם השוואות הממיין את $\cup_{i=1}^{k} A_i$ בסיבוכיות $O(k^2)$? נמק.

2. יהא $G = (V, E)$ גרף קשיר ותהא w פונקציית משקל אי־שלילית על E. שני סעיפי השאלה <u>אינם</u> תלויים זה בזה.

א. (10 נקודות) נניח כי לכל מעגל פשוט (שאינו חותך את עצמו) C ב־ G ולכל שתי צלעות שונות $e, f \in C$ מתקיים $w(e) \neq w(f)$. הראה כי G מכיל עץ פורש מינימלי יחיד.

ב. (10 נקודות) יהא $n \geq 3$. תן דוגמא לגרף על n קדקדים G ולפונקציית משקל על צלעות G, כך ש־ G אינו מכיל 3 צלעות שוות משקל, וכך שמספר העצים הפורשים המינימליים ב־ G הינו 2^{n-2}.

3. יהיו $p_1, \ldots, p_n \geq 0$ כך ש־ $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. יהיו $\ell_1, \ldots, \ell_n$ אורכי המילים בצופן רישא אופטימלי המתאים לוקטור ההתפלגות $p = (p_1, \ldots, p_n)$. יהא

$$L(p) = \sum_{i=1}^n p_i \ell_i$$

האורך הממוצע (הממושקל) של מילה בצופן אופטימלי זה.

א. (10 נקודות) יהא $n = 2^k$ ונגדיר $p = (p_1, \ldots, p_n)$ ע"י:

$$p_i = \begin{cases} 2^{-(k-1)} & 1 \leq i \leq 2^{k-2}, \\ 2^{-k} & 2^{k-2} + 1 \leq i \leq 2^{k-1}, \\ 2^{-(k+1)} & 2^{k-1} + 1 \leq i \leq 2^k. \end{cases}$$

חשב את $L(p)$.

ב. (10 נקודות) יהא $n = 6$. חשב:

$$\max \left\{ L(p_1, \ldots, p_6) : p_1 + p_2 = \frac{1}{2} \ , \ p_3 + p_4 = \frac{1}{3} \ , \ p_5 + p_6 = \frac{1}{6} \right\}.$$

נמק את החישוב.

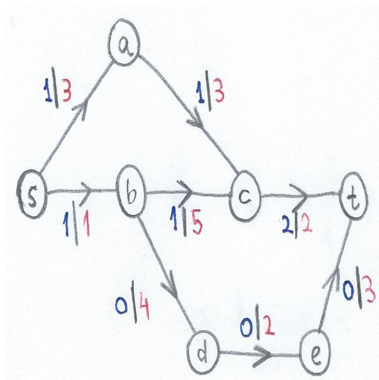
4. א. (10 נקודות) מצא את כל הפתרונות ב־$\mathbb{Z}_{253}$ של המשוואה הריבועית

$$x^2 \equiv 1 (mod \ 253).$$

ב. (10 נקודות) מצא את כל הפתרונות ב־$\mathbb{Z}_{253}$ של המשוואה

$$x^{49} \equiv 2 (mod \ 253).$$

5. א. (10 נקודות) נתונה רשת זרימה עם מקור s ובור t. נתונות פונקציית קיבול c וזרימה חוקית f_0 המצוינות על הצלע e ע"י $f_0(e)|c(e)$.
קבע האם קיים מסלול $s-t$ לא־רווי עבור הזרימה f_0.
מצא זרימה מקסימלית וחתך מינימלי ברשת.



ב. (10 נקודות) נתונות קבוצות $A_1,\ldots,A_m \subset \{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים:

- $|A_i| = k\ell$ לכל $1 \le i \le m$.
- $|\{i : j \in A_i\}| = \ell$ לכל $1 \le j \le n$.

הוכח ע"י <u>שמוש במשפט הזרימה המקסימלית והחתך המינימלי</u> כי קיימות קבוצות <u>זרות</u> $B_1,\ldots,B_m$ כך ש־ $B_i \subset A_i$ ו־ $|B_i| = k$ לכל $1 \le i \le m$.