1. א. עבור $1 \le i \le 4$ נמצא את $y_i$ לתוך $X \cup \{y_1, \dots, y_{i-1}\}$ ע"י חפוש בינארי תוך שמוש בלכל היותר $\lceil \log_2(n+i) \rceil$ השוואות. סה"כ מס' ההשוואות הינו לכל היותר

$$\sum_{i=1}^{4} \lceil \log_2(n+i) \rceil = 4 \log_2 n + O(1)$$

ב. מס' התמורות המסודרות האפשריות במזוג של 4 מספרים עם מערך מסודר של $n$ מספרים הוא $\prod_{i=1}^{4}(n+i)$. לכן כל אלגוריתם השוואות לבעיה הנ"ל יבצע על קלט מסויים לפחות $\log_2 \prod_{i=1}^{4}(n+i) \ge \log_2(n^4) = 4\log_2 n$ השוואות. מאחר ו- $4\log_2 n > 3\log_2 n + 100$ עבור $n > 2^{100}$, הרי שלא קיים אלגוריתם לבע"ה בסבוכיות $\le 3\log_2 n + 100$.

2. ב. ראשית נשים לב שלכל התפלגות $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ מתקיים $f(r_1, r_2, r_3, r_4) \le 2$. תהא עתה $q = (q_1, \dots, q_5)$ התפלגות המקיימת $q_1 \ge \dots \ge q_5$. אזי $q_4 + q_5 \le \frac{2}{5}$ ולכן

$$f(q_1, \dots, q_5) = f(q_1, q_2, q_3, q_4 + q_5) + q_4 + q_5$$

$$\le 2 + \frac{2}{5} = 2.4$$

3. א. הראנו בכיתה כי אם $T'=(V,E')$ העץ המתקבל ע"י

אלגוריתם קרוסקל ו- $E'=\{g'_1,\dots,g'_{n-1}\}$ , $w(g'_1)\le\dots\le w(g'_{n-1})$ ,

אזי לכל עץ פורש $T''=(V,E'')$ , $E''=\{g''_1,\dots,g''_{n-1}\}$

עם $w(g''_1)\le\dots\le w(g''_{n-1})$ מתקיים $w(g'_i)\le w(g''_i)$ לכל $1\le i\le n-1$ .

(אם השתמשתם בעובדה זו, היה עליכם להוכיח, למשל בעזרת למת החלפה).

מכאן נובע כי אם $T''$ עפ"מ אזי $w(g'_i)=w(g''_i)$ לכל $1\le i\le n-1$ .

בפרט $w(e_i)=w(g'_i)=w(f_i)$ לכל $1\le i\le n-1$ .

ב. $G$ מכיל עפ"מ יחיד. <u>הוכחה</u>: מסעיף א' נובע שקיימים משקלות $\alpha_1<\dots<\alpha_t$

וטבעיים $1\le m_1,\dots,m_t$ כך שלכל עפ"מ $T'=(V,E')$ ,

קבוצת הקשתות $E_i(T')=\{e\in E' : w(e)=\alpha_i\}$ מקיימת $|E_i(T')|=m_i$

לכל $1\le i\le t$ . יהיו עתה $T'=(V,E')$ , $T''=(V,E'')$ שני עפ"מ.

<u>טענה</u>: $E_i(T')=E_i(T'')$ לכל $1\le i\le t$ (ובפרט $E'=E''$).

<u>הוכחה</u>: אינדוקציה על $i$ . נניח ל- $0\le i<t$ ונוכיח ל- $i+1$ .

תהי $e\in E_{i+1}(T')$ . נניח בשלילה ש- $e\notin E_{i+1}(T'')$ .

אזי $T''+e$ מכיל מעגל $C$. ממינימליות $T''$ נובע כי $w(e)\ge w(f)$

לכל $f\in C$ (אחרת $T''-f+e$ עפ"מ במשקל קטן יותר).

מיחידות הצלע המקסימלית ב- $C$ נובע כי $w(e)>w(f)$ לכל

$f\in C-\{e\}$ . לכן לכל $f\in C$ : $f\in \bigcup_{j\le i} E_j(T'') = \bigcup_{j\le i} E_j(T')\subset E'$

הנחת האינדוקציה

מכאן ש $C\subseteq E'$ , סתירה!