בוחן באלגוריתמים קומבינטוריים 104291 – 15.12.15

משך הבוחן שעתיים. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל ארבע השאלות. **בהצלחה!**

1. יהא $X = \{x_1 < \cdots < x_n\}$ קבוצה ממויינת של n מספרים, ותהא $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ קבוצה של 4 מספרים.

א. (13 נקודות) תן אלגוריתם השוואות יעיל למיון $X \cup Y$ ונתח את סיבוכיותו.

ב. (12 נקודות) האם קיים אלגוריתם השוואות למיון $X \cup Y$ שסיבוכיותו קטנה או שווה ל־ $3\log_2 n + 100$? הוכח טענתך.

2. יהיו $p_1, \ldots, p_m \geq 0$ כך ש־ $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. יהיו $\ell_1, \ldots, \ell_m$ אורכי המילים בצופן רישא אופטימלי המתאים לוקטור ההתפלגות $p = (p_1, \ldots, p_m)$. יהא

$$f(p) = \sum_{i=1}^m p_i \ell_i$$

האורך הממוצע (הממושקל) של מילה בצופן אופטימלי זה.

א. (13 נקודות) יהא $m = 8$ ותהא $p = (p_1, \ldots, p_m)$ ההתפלגות הנתונה ע"י

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8) = (\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{7}{36}, \frac{8}{36}).$$

מצא צופן רישא אופטימלי להתפלגות p וחשב את $f(p)$.

ב. (12 נקודות) האם קיימת התפלגות $q = (q_1, \ldots, q_5)$ שעבורה

$$f(q) = 2.5 \quad ?$$

נמק.

3. יהא $G=(V,E)$ **גרף על** $|V|=n$ **קדקדים עם משקלות אי־שליליים** $w(e)$ **על הצלעות** $e\in E$.

א. (13 **נקודות) יהיו** $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$ **שני עצים פורשים מינימליים של** G**, כך ש־** $E_1=\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}, E_2=\{f_1,\ldots,f_{n-1}\}$ **וכך ש־** $w(e_1)\le\cdots\le w(e_{n-1})$ **ו־** $w(f_1)\le\cdots\le w(f_{n-1})$.
הוכח כי $w(e_i)=w(f_i)$ **לכל** $1\le i\le n-1$.
הערה: יש להוכיח את הטענה במלואה מבלי להסתמך על תוצאות שהוכחנו בכיתה, למעט למת החילוף ליערות שאותה אפשר לצטט בלי הוכחה.

ב. (12 **נקודות) נניח כי כל מעגל** C **ב־** G **מכיל צלע יחידה בעלת משקל מקסימלי ב־** C.
האם בהכרח G **מכיל עץ פורש מינימלי יחיד? נמק במדוייק.**

4. א. (13 **נקודות) תאר את אלגוריתם** Dijkstra **למציאת המרחקים והמסלולים המינימליים בין הקדקד** U **לבין כל שאר הקדקדים בגרף מכוון** G **עם משקלות אי־שליליים על הצלעות.**

ב. (12 **נקודות) הרץ את אלגוריתם** Dijkstra **על הגרף המכוון הבא:**