מבחן באלגוריתמים קומבינטוריים $104291 - 28.1.16$

משך המבחן שלוש שעות. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל חמש השאלות. **בהצלחה!**

1. יהיו k,n טבעיים ויהא $N = kn$. נתונה קבוצה $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ של N מספרים ממשיים שונים.

א. (10 נקודות) תן אלגוריתם השוואות יעיל ככל האפשר המחלק את A ל־ k קבוצות זרות $B_1, \ldots, B_k$ כך שלכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $|B_i| = n$, וכך שלכל $1 \leq i < j \leq k$ ולכל $x \in B_i$ ו־ $y \in B_j$ מתקיים $x < y$. נתח את סיבוכיות האלגוריתם.

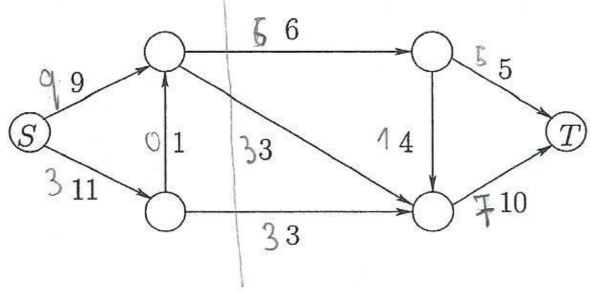
ב. (10 נקודות) נניח כי $k = n$. האם קיים אלגוריתם השוואות לבעייה בסעיף א' שסיבוכיותו הינה $O(n^2)$? נמק.

2. שני הסעיפים בשאלה זו הינם בלתי תלויים.

א. (10 נקודות) קבע האם קיימת רשת זרימה המקיימת את שני התנאים הבאים:
(i) קיבול כל צלע ברשת הוא או 5 או 7.
(ii) ערך הזרימה המקסימלית ברשת הוא 23.

ב. (10 נקודות) נתון גרף $G = (V, E)$ עם משקלות אי־שליליים על הצלעות, כך ש־ G מכיל שני עצים פורשים מינימליים <u>זרים בצלעות</u> $T_1 = (V, E_1)$ ו־ $T_2 = (V, E_2)$ (כלומר $E_1 \cap E_2 = \emptyset$).
הוכח כי G בהכרח מכיל 4 צלעות שוות משקל.

3. א. (10 נקודות) תהא $G=(V,E)$ רשת הזרימה המתוארת להלן עם מקור S, בור T וקיבולים המצויינים על הקשתות.
מצא חתך מינימלי וזרימה מקסימלית מ־ S ל־ T ע"י הפעלת אלגוריתם $Ford-Fulkerson$. פרט את הצעדים המתבצעים במהלך ההרצה.



ב. (10 נקודות) נתונות n קבוצות סופיות (לאו דווקא זרות) $A_1,\ldots,A_n$, ונתונים שני וקטורים של מספרים טבעיים $(k_1,\ldots,k_n)$ ו־ $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ המקיימים $k_i\le \ell_i$ לכל $1\le i\le n$.
תן אלגוריתם יעיל הקובע האם קיימות קבוצות <u>זרות</u> $B_1,\ldots,B_n$ המקיימות:

- $B_i\subset A_i$ לכל $1\le i\le n$.
- $k_i\le |B_i|\le \ell_i$ לכל $1\le i\le n$.
- $\cup_{i=1}^n B_i=\cup_{i=1}^n A_i$.

4. נגדיר פונקצית הצפנה $E:\mathbb{Z}^*_{561}\to\mathbb{Z}^*_{561}$ ע"י

$$E(x)=x^{183}(\mathrm{mod}\ 561)\ .$$

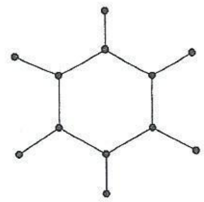
א. (2 נקודות) פרק את 561 לגורמיו הראשוניים.
ב. (9 נקודות) הראה כי E חח"ע ועל ומצא ביטוי מפורש לפונקצית הפענוח (כלומר לפונקציה ההפוכה) $D:\mathbb{Z}^*_{561}\to\mathbb{Z}^*_{561}$.

ג. (9 נקודות) מה מספר הפתרונות ב־ $\mathbb{Z}_{561}$ של המשוואה

$$x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 561)\quad ?$$

מצא פתרון כזה השונה מ־ ± 1.

5. יהא $k \geq 3$. נגדיר k־פרח כגרף על $2k$ קדקדים ובעל $2k$ צלעות המורכב ממעגל באורך k ובנוסף עוד k קדקדים המחוברים כל אחד לקדקד שונה במעגל. למשל 6־פרח הוא הגרף הבא:



לגרף (לא מכוון) G נסמן ב־ $p(G)$ את ה־ k המקסימלי כך ש־ G מכיל k־פרח.

נגדיר את השפות הבאות:

$L_1 =$ כל הגרפים G המכילים מעגל המילטוני (כלומר מעגל העובר פעם אחת בדיוק דרך כל קדקד).

$L_2 =$ כל הגרפים (הלא מכוונים) $G = (V, E)$ המקיימים $p(G) = \frac{|V|}{2}$.

$L_3 =$ כל הגרפים (הלא מכוונים) $G = (V, E)$ המקיימים $p(G) \geq \frac{|V|}{10}$.

~~$L_4 =$ כל הגרפים (הלא מכוונים) G המקיימים $p(G) \geq 10$.~~

א. (10 נקודות) הגדר את היחס $L' \leq_P L$ בין זוג שפות $L', L \subset \{0,1\}^*$.
הראה כי $L_1 \leq_P L_2$.

ב. (10 נקודות) הגדר את המחלקות P, NP, NPC.
בהנחה כי $P \neq NP$, קבע לכל אחת מהשפות $L_2, L_3, \cancel{L_4}$ האם היא ב־ P, NP, NPC. (מותר להסתמך על כך ש־ $L_1 \in NPC$).