1.א. נמזג את איברי A לתוך B בזה אחר זה ע"י חיפוש בינארי.

סה"כ מס' ההשוואות הוא לכל היותר

$$\sum_{j=1}^{k^2} \lceil \log_2(k^3+j) \rceil \leq k^2 \lceil \log_2 (k^3+k^2) \rceil \leq k^2 \lceil \log_2 (2k^3) \rceil$$

$$= \lceil 3k^2 \log_2 k + k^2 \rceil = O(k^2 \log_2 k)$$

ב. מס' המיזוגים האפשריים של סדרות ממויינות באורכים $k^3 + k^2$

הוא

$$\binom{k^3+k^2}{k^2} = \frac{(k^3+k^2)\cdots(k^3+1)}{(k^2)!} \geq \frac{(k^3)^{k^2}}{(k^2)^{k^2}} = k^{k^2}.$$

לכן לפי חסם האינפורמציה, סיבוכיות כל אלגוריתם למיזוג A ו-B הינה

לפחות $\log_2 \binom{k^3+k^2}{k^2} \geq \log_2 k^{k^2} = k^2 \log_2 k$.

בפרט, האלגוריתם בסעיף א' אופטימלי עד כדי קבוע כפלי, ואין אלג' למיזוג A ו-B שסיבוכיותו $O(k^2)$.

2. יהיו $T=(V,E_1)$ עץ פורש מינימלי ב-G ויהי $S=(V,E_2)$

עץ פורש המקיים $w(S) = \min\{w(T') : T'$ עץ פ"ש השונה מ-$T\}$.

טענה: קיימות צלעות $e_1 \in T-S$, $f \in S-T$ כך ש- $S = T - e_1 + f$.

הוכחה: תהי $e_1 \in T-S$ כך ש- $w(e_1) = \min\{w(e) : e \in T-S\}$

$S+e_1$ מכילה מעגל פשוט C_1 המכיל בהכרח את e_1.

תהי $f \in C_1 - T$ (קיימת כזו, אחרת $C_1 \subset T$). $T+f$ מכילה

מעגל פשוט C_2 המכיל בהכרח את f. תהי $e_2 \in C_2 - S$

(קיימת כזו, אחרת $C_2 \subset S$). $T - e_2 + f$ הוא עפ"ש המקיים

$$w(T) \leq w(T - e_2 + f) = w(T) - w(e_2) + w(f)$$

לכן $w(e_2) \le w(f)$ ולכן $w(f) > w(e_2) \geq w(e_1)$.

לכן, $S-f+e_1$ הוא עפ"מ המקיים $w(S-f+e_1)=w(S)-w(f)+w(e_1)<w(S)$

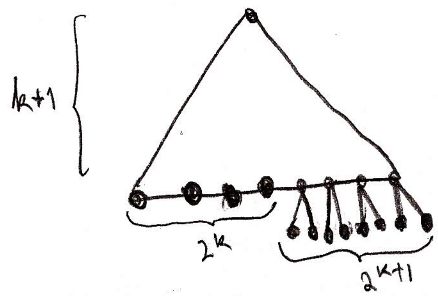
ולכן מבחירת S נובע כי $S-f+e_1=T$.

הטענה מוכחת גם את א' וגם את ב'.

3. ב. לאחר 2^k איטרציות של אלגוריתם הופמן נגדיר וקטור $q=(q_1,\dots,q_{2^{k+1}})$

כאשר
$$q_i=\begin{cases}\frac{3}{5}\cdot 2^{-k} & 1\le i\le 2^k\\ \frac{2}{5}\cdot 2^{-k} & 2^k+1\le i\le 2^{k+1}\end{cases}$$

נשים לב כי $q_1\ge\dots\ge q_{2^{k+1}}$ וכי $2q_{2^{k+1}}\ge q_1$, ולכן לפי אלגוריתם הופמן העץ האופטימלי ל-q הוא העץ הבינארי המלא. לכן העץ האופטימלי ל-p הוא:

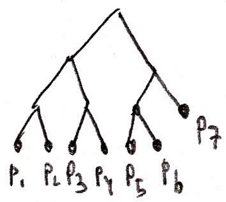


לכן
$$l_i=\begin{cases}k+1 & 1\le i\le 2^k\\ k+2 & 2^k+1\le i\le 2^k+2^{k+1}\end{cases}$$
ולכן

$$L(p)=2^{k+1}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^k}\cdot(k+2)+2^k\frac{3}{5\cdot 2^k}(k+1)=k+\frac{7}{5}$$

4. תהא $p=(p_1,\dots,p_7)$ ונניח בה"כ כי $p_7=\max_i p_i$. אזי $p_7\ge\frac{1}{7}$.

נתאים ל-p את העץ:



אזי

$$L(p_1,\dots,p_7)\le 3(p_1+\dots+p_6)+2p_7$$
$$=3(1-p_7)+2p_7=3-p_7\le 3-\frac{1}{7}=\frac{20}{7}<2.9$$