

בוּחַן בַּאֲלִגוֹרִיתִימִים קוֹמְבִינָטוֹרִיִים 104291 – 14.12.11

משך הבוחן שעתיים. אין שימוש בחומר עזר או מחשב. אנא נמק תשובותיך בקצור ובבהירות. ענה על כל ארבע השאלות. **בהצלחה!**

1. יהא $0 < \alpha < 1$ ויהא $x = (x_1, \dots, x_n)$ וקטור של מספרים ממשיים שונים. תהא π התמורה הממיינת את x , כלומר:

$$x_{\pi(1)} < \dots < x_{\pi(n)}$$

א. (13 נקודות) תן אלגוריתם השוואות (יעיל ככל האפשר) המקבל כקלט את α ו- x , ומחשב כפלט את $\pi(1), \dots, \pi(\lfloor \alpha n \rfloor)$. (כלומר אלגוריתם הממייך את $\lfloor \alpha n \rfloor$ האיברים הקטנים ביותר ב- x). נתח את סיבוכיות האלגוריתם כפונקציה של α ו- n .

ב. (12 נקודות) תן חסם תחתון, כפונקציה של α ו- n , למספר ההשוואות המירבי שיבצע כל אלגוריתם הפותר את הבעיה בסעיף א'.

2. א. (13 נקודות) תאר את האלגוריתם למציאת החציון של סדרת מספרים ממשיים ונתח את זמן הריצה שלו.

ב. (12 נקודות) נתונים n מספרים ממשיים שונים x_1, x_2, \dots, x_n וכן n מספרים חיוביים w_1, \dots, w_n המקיימים $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. תן אלגוריתם שסיבוכיותו $O(n)$ המוצא z ממשי המקיים

$$\sum_{\{i: x_i \leq z\}} w_i \geq \frac{1}{2} \quad \text{וגם} \quad \sum_{\{i: x_i \geq z\}} w_i \geq \frac{1}{2}$$

3. יהא $G = (V, E)$ גרף עם $|V| = n \geq 4$ קדקדים ועם משקלות אי-שליליים $w(e)$ על הצלעות $e \in E$.

א. (9 נקודות) נניח כי e_1, \dots, e_{n-1} הינו עץ פורש המקיים $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_{n-1})$ וכי f_1, \dots, f_{n-1} הינו עץ פורש המקיים $w(f_1) \leq \dots \leq w(f_{n-1})$. הוכח כי קיים עץ פורש שמשקלו לכל היותר

$$\sum_{i=1}^{n-1} \min\{w(e_i), w(f_i)\}$$

ב. (8 נקודות) נתון כי G מכיל שני עצים פורשים מינימליים $T_1 = (V, E_1)$, $T_2 = (V, E_2)$ (כלומר $E_1 \cap E_2 = \emptyset$). הוכח כי G בהכרח מכיל 6 צלעות שוות משקל.

ג. (8 נקודות) תן דוגמא של גרף ממושקל G על 6 קדקדים המכיל שני עצים פורשים מינימליים זרים בצלעות, אך אינו מכיל 7 צלעות שוות משקל.

4. יהיו $p_1, \dots, p_7 \geq 0$ כך ש- $\sum_{i=1}^7 p_i = 1$. יהיו l_1, \dots, l_7 אורכי המילים בצופן רישא אופטימלי המתאים לוקטור ההתפלגות $p = (p_1, \dots, p_7)$. יהא

$$f(p) = \sum_{i=1}^7 p_i l_i$$

האורך הממוצע (הממושקל) של מילה בצופן אופטימלי זה.

א. (13 נקודות) חשב את $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$.

ב. (12 נקודות) האם קיימת התפלגות $p = (p_1, \dots, p_7)$ כך ש-

$$f(p) = \frac{41}{14} ?$$

