

תרגילים נוספים על המכפלה הווקטורית.

(חדו"א 2, 1מ2, 2מ2)

גירסה מיום 16.10.09

במהלך כל חמשת התרגילים הבאים, $0 < \theta < \pi$, נניח תמיד שהמכפלה הווקטורית של $\vec{a} \times \vec{b}$ של שני ווקטורים \vec{a} ו- \vec{b} במרחב התלת-מימדי מוגדרת באופן **גאומטרי**. כלומר $\vec{a} \times \vec{b}$ הוא הווקטור בעל אורך $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$ אשר פונה בכוון שהוא ניצב גם ל- \vec{a} וגם ל- \vec{b} , והמגמה של $\vec{a} \times \vec{b}$ נקבעת לפי כלל הבורג הימני. כאן θ מסמן את הזווית בין \vec{a} ו- \vec{b} אשר מקיימת $0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta$. (ברשימות מיום 14/10/09 השתמשתי בסימון "זמני" $\vec{a} \times_g \vec{b}$ כאשר מגדירים את המכפלה באופן זה.)

בעזרת התרגילים הבאים אתם **תוכיחו** את הנוסחה האלגברית לחישוב הרכיבים של $\vec{a} \times \vec{b}$. אבל זו לא המטרה היחידה של התרגילים. תוכיחו גם את חוק הפילוג למכפלה ווקטורית, ובנוסף, דבר שעוד יותר חשוב, תתרגלו "לחשוב במרחב" באופן יותר מתוחכם, ולהרגיש ולהבין יותר טוב את המשמעות של הפעולות השונות עם ווקטורים.

0. נזכיר קודם שהפעולה של חיבור ווקטורים מקיימת את חוק ה**קיבוצ**, כלומר כל שלישיה של ווקטורים תלת מימדיים \vec{a} , \vec{b} ו- \vec{c} מקיימת

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (1)$$

ולכן אפשר להשתמש באופן חד-משמעי בסימון $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ עבור כל אחד מהסכומים ב-(1). (ניתן להוכיח את (1) בקלות כמסקנה של שני דברים: • התכונה הדומה של חיבור של מספרים ממשיים, • והנוסחה $[a_1, b_1, c_1] + [a_2, b_2, c_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]$.)

1. יהי $\vec{v} \neq \vec{0}$ ווקטור תלת מימדי קבוע. עבור כל ווקטור תלת-מימדי \vec{a} יהי $P_{\vec{v}}(\vec{a})$ הווקטור

$$P_{\vec{v}}(\vec{a}) = \vec{a} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

(i) חשבו את הזווית בין הווקטורים \vec{v} ו- $P_{\vec{v}}(\vec{a})$ עבור כל \vec{a} .
(ii) הוכיחו כי $P_{\vec{v}}(\vec{a} + \vec{b}) = P_{\vec{v}}(\vec{a}) + P_{\vec{v}}(\vec{b})$ עבור כל שני ווקטורים תלת מימדיים \vec{a} ו- \vec{b} .
(iii) הוכיחו כי $\vec{v} \times P_{\vec{v}}(\vec{a}) = \vec{v} \times \vec{a}$ עבור כל ווקטור $\vec{v} \neq \vec{0}$ וכל ווקטור \vec{a} תלת מימדיים. (רצוי לצייר תמונה של הווקטורים \vec{v} , \vec{a} , ו- $P_{\vec{v}}(\vec{a})$ אשר נמצאים באותו מישור, ולהעזר בתמונה זו.)

2. יהי $\vec{v} \neq \vec{0}$ ווקטור תלת מימדי. יהי Π המישור אשר ניצב ל- \vec{v} ומכיל את הנקודה $(0, 0, 0)$. נתבונן בכל הווקטורים $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ אשר ניצבים ל- \vec{v} ("ז"א הנקודה (a_1, a_2, a_3) נמצאת על פני Π , או, במילים אחרות, אם נמקם את ה"זנב" של \vec{a} ב- $(0, 0, 0)$ אז \vec{a} נמצא בתוך Π). עבור כל ווקטור כזה \vec{a} יהי $R_{\vec{v}}(\vec{a})$ הווקטור המתקבל מ- \vec{a} בתהליך הבא: קודם מזיזים את ה"זנב" של \vec{a} אל $(0, 0, 0)$ כך ש- \vec{a} נמצא בתוך Π , ואחר מכן מסובבים את \vec{a} ב- 90° בתוך המישור Π . אנו מניחים כאן שהסיבוב הזה הוא בכוון **נגד השעון** כאשר אנו מסתכלים במישור Π מן הצד כך כהווקטור \vec{v} פונה לקראתנו.

(i) הוכיחו, בעזרת נימוקים גאומטריים, כי $R_{\vec{v}}(\vec{a} + \vec{b}) = R_{\vec{v}}(\vec{a}) + R_{\vec{v}}(\vec{b})$ עבור כל בחירה של ווקטורים \vec{a} ו- \vec{b} אשר ניצבים שניהם ל- \vec{v} .
(ii) מצאו נוסחא אשר מקשרת בין $\vec{v} \times \vec{a}$ ו- $R_{\vec{v}}(\vec{a})$ ו- $\|\vec{v}\|$ עבור כל \vec{a} ניצב ל- \vec{v} .

3. הוכיחו את חוק הפילוג עבור המכפלה הווקטורית, ז"א הוכיחו כי

$$\vec{v} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{v} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{b} \quad (2)$$

עבור כל בחירה של ווקטורים תלת מימדיים \vec{a} , \vec{b} ו- \vec{v} .
רמז: אם $\vec{v} \neq \vec{0}$ אזי $\vec{v} \times \vec{c} = \vec{v} \times P_{\vec{v}}(\vec{c})$ עבור כל ווקטור תלת מימדי \vec{c} . בעזרת 2(ii) רשמו נוסחא עבור $\vec{v} \times \vec{c}$ כביטוי אשר תלוי ב- $R_{\vec{v}}(P_{\vec{v}}(\vec{c}))$. אפשר להציב את \vec{a} או \vec{b} או $\vec{a} + \vec{b}$ במקום \vec{c} בנוסחא זו. עכשיו השתמשו ב- 1(ii) ו- 2(i) כדי להוכיח את (2).

4. (i) הוכיחו, כמסקנה של (2), כי

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{v} = \vec{a} \times \vec{v} + \vec{b} \times \vec{v}. \quad (3)$$

(ii) יהיו $\vec{u}_1 = [1, 0, 0] = \hat{i}$ ו- $\vec{u}_2 = [0, 1, 0] = \hat{j}$ ו- $\vec{u}_3 = [0, 0, 1] = \hat{k}$. ציירו את הווקטורים האלה. בעזרת שיקולים גאומטריים מצאו את הווקטור $\vec{u}_m \times \vec{u}_n$ עבור כל בחירה של m ושל n השווים ל-1, 2 או 3.

(iii) נתונים הווקטורים $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$ ו- $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3] = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3$. רשמו את $\vec{a} \times \vec{b}$ כהרכב לינארי של תשע הווקטורים $\vec{u}_m \times \vec{u}_n$ כאשר m ו- n שווים ל-1, 2, 3. כדי לעשות כך עליכם להשתמש ב- (3) מספר פעמים. כמורכך בהצדקת החישוב הזה משתמשים גם בחוק הקיבוץ לחיבור ווקטורים (מ"תרגיל" 0) וגם בתכונה נוספת פשוט למדי של המכפלה הווקטורית. נסחו והוכיחו את התכונה הזו.
(iv) בעזרת הסעיפים (iii) ו- (ii) הוכיחו כי

$$[a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3] = [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1].$$