כמה הסברים על הבדיקה של הבחינה מיום 18/9/2007.

Version 1. 20/9/07.

בבדיקה של חלק מהשאלות במבחן זה, לפעמים הוספנו הערות המתיחסות לפתרון שלך, בעזרת "קודים" מקוצרים $\boxed{\text{Y1}}$ עד $\boxed{\text{Z11.}}$ רוב ה"קודים" מתיחסים לשאלות 1 ו-2 של חלק ב' של החצי הראשון של הבחינה.

Y1 השתמשת בכלל השרשרת. אבל לא הסברת מדוע נכון להשתמש בו בשלב זה.

(אפילו אם רשמת במקום אחר בפתרון שלך כי F בעלת נגזרות חלקיות רציפות, לא קישרת את התכונה הזו עם שימושך כאן בכלל השרשרת.)

Y2 הנגזרת שאתה מחשב כאן בעזרת כלל השרשרת היא **לא** הנגזרת החלקית F'_x. (אולי במקום F'_x השתמשת בסימון $\frac{\partial F}{\partial x}$ או אפילו $\frac{dF}{dx}$ עבור הנגזרת החלקית הזו.) אתה בעצם מחשב כאן את הנגזרת $G'(x)$ של פונקציה חדשה של משתנה **אחד** שאני מסמן אותה כאן ע"י G. פונקציה זו מוגדרת ע"י הנוסחה $G(x) := F(x, \varphi(x))$. בשלב זה אנו מניחים כי $F(x, \varphi(x)) = 0$ עבור כל x בסביבה מסויימת של $x = 1$. מזה נובע ש-$G(x) = 0$ ולכן גם $G'(x) = 0$ עבור כל x באותה סביבה. בוודאי **לא נכון** לטעון, כפי שחלק מכם טענתם, כי נגזרת זו שווה ל-3.

Y3 הוכחת שאם $\varphi(x)$ קיימת ואם היא גזירה ב- $x = 1$, אזי נובע כי המשוואה

$$F'_x(1,2) + F'_y(1,2)\varphi'(1) = 0 \tag{1}$$

מתקיימת. (או אולי קיבלת משוואה אחרת, למשל $F'_x(1,2) + F'_y(1,2)\varphi'(1) = 3$, שהיא משוואה **לא נכונה**.) אבל אחרי שקיבלת את המשוואה, ניסית לפתור אותה כדי לקבל ביטוי עבור $\varphi'(1)$. כדי לפתור, נאלצת לחלק ב-$F'_y(1,2)$. זו פעולה לא נכונה כי $F'_y(1,2) = 0$. במקום לנסות לחלק ב-$F'_y(1,2)$ היית צריך להציב את הערכים הנתונים של $F'_y(1,2)$ ושל $F'_x(1,2)$ ישירות בתוך המשוואה (1) ולהראות שמקבלים סתירה מההצבות האלו.

Y4 השתמשת במשפט הפונקציות הסתומות. אבל **אסור** להשתמש במשפט זה כאן, כי אחד מהתנאים הדרושים להפעלתו לא מתקיים.

Y5 שמת לב, בצדק, כי לפחות אחד מהתנאים הדרושים להפעלת משפט הפונקציות הסתומות לא מתקיים. אבל דבר זה **לא** גורר שמסקנות המשפט הזה לא מתקיימות. (יש דוגמאות פשוטות שבהם תנאי המשפט הזה לא מתקיימים אבל בכל זאת המסקנות מתקיימות. ראה למשל ההערה $\boxed{\text{Y8.}}$) כנראה לא קראת את השורה האחרונה של השאלה שבה הוזהרתם בפרוש שמשפט הפונ-קציות הסתומות נותן תנאים מספיקים אבל **לא** הכרחיים.

Y6 השתמשת במשפט הפונקציות הסתומות, או פחות או יותר השתמשת בו. טענת שמזה נובע שמתקיימת הנוסחה

$$\varphi'(1) = -F'_x(1,2)/F'_y(1,2). \tag{2}$$

אז טענת כי, מכוון ש-$F'_y(1,2) = 0$, נובע מהנוסחה (2) שהנגזרת $\varphi'(1)$ לא קיימת. דרך מחשבה הזו בפרוש לא נכונה. מכוון ש-$F'_y(1,2) = 0$ **אסור** להפעיל את משפט הפונקציות הסתומות. אז אי-אפשר אפילו להתחיל לדבר על הנוסחה (2). ראה הערה $\boxed{\text{Y8}}$.

Y7 רשמת את הנוסחה

$$\varphi'(1) = -F'_x(1,2)/F'_y(1,2). \tag{3}$$

אז טענת כי, מכוון ש-$F'_y(1,2) = 0$, נובע כי הנגזרת $\varphi'(1)$ לא קיימת. דרך המחשבה הזו לא נכונה. הנוסחה (3) מתקבלת כאחד המסקנות של משפט הפונקציות הסתומות. מכוון ש-$F'_y(1,2) = 0$ **אסור** להפעיל את משפט הפונקציות הסתומות. (ואולי אפילו כתבת גם בעצמך שאסור להפעיל את המשפט הזה.) לאור זה, אין שום הצדקה להניח שהנוסחה (3) מתקיימת. ראה הערה Y8 .

Y8 קיימות דוגמאות של פונקציות $F(x,y)$ שעבורן המשוואה $F(x,y) = 0$ מגדירה פונקציה יחידה וגזירה $\varphi(x)$ אשר מקיימת את $F(x,\varphi(x)) = 0$ עבור כל x ממשי, וכך ש- $\varphi(1) = 2$, אבל הנוסחה (2) לא נכונה ולא רלוונטית, כי $F'_y(1,2) = 0$.

הנה דוגמא אחד כזה: ניקח $F(x,y) = (y-x-1)^2$. אז $F(1,2) = 0$ ואכן $F(x,y) = 0$ אם ורק אם $y = x+1$. במקרה זה המשוואה $F(x,y) = 0$ מגדירה את הפונקציה הגזירה $\varphi(x) = x+1$. אבל $F'_y(1,2) = 0$, ולכן אין שום סיכוי שהנוסחה (2) או הנוסחה (3) יכולה להתקיים. דוגמה זו רלוונטי גם עבור השגיאה שמתוארת ב- Y5 . (כן, כמובן, (2) ו- (3) הן שתיהן אותה נוסחה.)

Y9 היה יותר הגיוני להשתמש באות אחר עבור הפונקציה הזו.

Z1 כתבת את הנוסחה המבוססת על כלל השרשרת $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \varphi'(0)\cdot \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(x,y)=(0,0)}$.

אבל זו נוסחה לא נכונה. היא היתה נכונה אילו הנגזרת $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(x,y)=(0,0)}$ הייתה קיימת. אבל נגזרת זו לא קיימת. ראו את Z1B עבור הסברים נוספים הקשורים לשגיאה זו.

Z1A כתבת את הנוסחה המבוססת על כלל השרשרת $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$.

אבל נוסחה זו לא נכונה בנקודה $(x,y) = (0,0)$. גם לא ברור בכלל שהיא נכונה כאשר $(x,y) \neq (0,0)$, כי לא ידוע לנו האם הנגזרת $\varphi'(t)$ קיימת עבור ערך כלשהו של $t \neq 0$. ראו את Z1B עבור הסברים נוספים הקשורים לשגיאה זו.

Z1B נדון במקרה יותר כללי: נניח ש-φ היא פונקציה כלשהי של משתנה אחד. נניח ש-g היא פונקציה כלשהי של שני משתנים. נגדיר פונקציה $f(x,y)$ ע"י $f(x,y) = \varphi(g(x,y))$. אזי:

(i) אם $\varphi'(0)$ ו-$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ קיימות שתיהן, אז (לפי ההגדרות ולפי תוצאות בחדו"א מ2) מתקיימת

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \varphi'(g(0,0))\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \tag{4}$$

(ii) **אבל**, בדרך כלל, אם $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ לא קיימת, הדבר **לא** גורר שגם $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ לא קיימת. במקרה זה הנוסחה (4) לא מתקיימת ולכן אי-אפשר להשתמש בה כדי להגיע למסקנות כלשהן.

Z2 נניח שגם המונה וגם המכנה של שבר נתון שווים שניהן ל-0 בנקודה $t = 0$ או, לחילופין, בנקודה $(x,y) = (0,0)$. עובדה זו **לא** גורר שהגבול של אותו שבר לא קיים כאשר $t \to 0$ או כאשר $(x,y) \to (0,0)$. כדי להשטכנע על כך, תסתכלו למשל במקרים שבהם השבר הוא $\frac{\sin t}{t}$ או $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Z3 כנראה אין אפשרות לתת פתרון נכון לשאלה זו מבלי להעזר ב**הגדרה** של $f'_x(0,0)$.
לא השתמשת בהגדרה זו, ולא הצגת דרך אחרת נכונה לפתרון השאלה. לכן נאלצנו להוריד לפחות שתי נקודות מהציון שלך. (ברוב המקרים כאשר לא נרשם ההגדרה הנ"ל היו גם עוד שגיאות בפתרון ולכן היינו חייבים להוריד נקודות נוספות.)

Z4 טענת כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ו/או טענת כי $\sqrt{x^2+y^2}$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.
לצערנו, אף אחד מהטעונות האלו לא נכונה ב-$(0,0)$.

Z5 הוכחת, או ניסית להוכיח, כי הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ לא קיים. אבל זה בפרוש שונה מלהוכיח כי $f'_x(0,0)$ לא קיימת. קיימים דוגמאות של פונקציות f שעבורן $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ לא קיים אבל $f'_x(0,0)$ קיימת.

Z5A הוכחת, או ניסית להוכיח, כי הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$ לא קיים. אבל זה בפרוש שונה מלהוכיח כי $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$ לא קיימת בנקודה $(x,y)=(0,0)$. קיימים דוגמאות של פונקציות u שעבורן $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u'_x(x,y)$ לא קיים אבל $u'_x(0,0)$ קיימת.

Z6 זה בכלל לא נכון לנסות לחשב את $f'_x(0,0)$ ע"י הצבת $x=0$ ו-$y=0$ בנוסחה עבור $f'_x(x,y)$ שאולי קיבלת עבור המקרה שבו $(x,y)\neq(0,0)$. בנקודה $(0,0)$ עליך לנסות לחשב את $f'_x(0,0)$ בעזרת ה**הגדרה** של נגזרות חלקיות.

Z8 רציפות של פונקציה היא **לא** תנאי מספיק להפעלת כלל השרשרת.

Z9 כתבת את הנוסחה המבוססת על כלל השרשרת $\frac{d}{dx}\varphi(|x|)\big|_{x=0}=\varphi'(0)\cdot\frac{d}{dx}|x|\big|_{x=0}$. אבל זו נוסחה לא נכונה. היא היתה נכונה אילו הנגזרת $\frac{d}{dx}|x|\big|_{x=0}$ הייתה קיימת. אבל נגזרת זו לא קיימת.

Z10 בחישוב שלך כאן אתה מניח כי

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\varphi'(0). \tag{5}$$

אבל בניסוח השאלה לא נאמר באף מקום כי φ' רציפה. יתר על כן, אפילו לא נאמר כי $\varphi'(t)$ קיימת בנקודה כלשהי אחרת מ-$t=0$. לפיכך אין שום הצדקה להניח כי הנוסחה (5) מתקיימת.

Z11 נא לשים לב כי כאשר $t=\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$ אין לנו שום הבטחה כי $\varphi'(t)$ קיימת. קל וחומר, אין לנו שום סיבה להניח כי $\varphi'(t)$ שווה ל-3.
