חוק השרשרת עבור פונקציות של שני משתנים

כדי לתת הוכחה של חוק השרשרת נעזר במשפט היינה, יחד עם עוד הערה על המשפט הזה שנביא קודם.

משפט היינה (Heine): נתונות קבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$ ונקודה p ב $\overline{E}$ (הסגור של E) ופונקציה $g : E \to \mathbb{R}$. אזי הגבול $\lim_{q \to p, q \in E} g(q)$ קיים ושווה ל L אם ורק אם $\lim_{k\to\infty} g(q_k) = L$ עבור **כל** סדרה $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ של נקודות ב E כך ש $q_k \neq p$ לכל k ו $\lim_{k\to\infty} q_k = p$.

הערה: נניח ש $\lim_{q\to p} g(q) = L$ ושהפונקציה g מוגדרת גם בנקודה p (כלומר אנו מניחים כי $p \in E$). כמו-כן נניח כי $g(p) = L$. אזי עבור כל סדרה $\{q_k\}$ כנ"ל, אפילו אם נאפשר לה לקיים $q_k = p$ עבור ערכים מסוימים של k נקבל עדיין כי $\lim_{k\to\infty} g(q_k) = L$.

הוכחה של ההערה: בהנתן $\epsilon > 0$ כלשהו, קיים $\delta(\epsilon) > 0$ כך ש

$$|g(q) - L| < \epsilon \tag{1}$$

עבור כל נקודה $q \in E$ אשר מקיימת $d(p,q) < \delta(\epsilon)$ ו $p \neq q$. אבל, מפני שהפעם גם נתון ש $g(p) = L$ נקבל (1) גם כאשר $q = p$.

תהי $\{q_k\}$ סדרה כלשהי ב E אשר מתכנסת ל p. עבור כל $\epsilon > 0$ נבחר $N(\epsilon)$ כך ש $d(q_k, p) < \delta(\epsilon)$ עבור כל $k \geq N(\epsilon)$. אזי, עבור אותם ערכים של k, בין אם $q_k = p$, או לאו, נקבל $|g(q_k) - L| < \epsilon$. בכך הוכחנו שההערה נכונה. ■

חוק השרשרת

משפט: נניח שהפונקציה f של שני משתנים היא דיפרנציאבילית בנקודה $p_0 = (x_0, y_0)$. תהינה X ו Y פונקציות של משתנה אחד אשר מוגדרות בסביבת הנקודה $t_0 \in \mathbb{R}$ כך שנגזרותיהן $X'(t)$ ו$Y'(t)$ קיימות שניהן ב $t = t_0$. כמו-כן נניח כי $X(t_0) = x_0$ ו $Y(t_0) = y_0$. נגדיר את הפונקציה של משתנה אחד ϕ ע"י $\phi(t) = f(X(t), Y(t))$. אזי הנגזרת ϕ' קיימת ב $t = t_0$ ונתונה ע"י

$$\phi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t_0), Y(t_0))X'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t_0), Y(t_0))Y'(t_0). \tag{2}$$

הוכחה: מכוון ש f דיפרנציבילית ב p_0, הנגזרות $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$ ו $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$ קיימות. נגדיר פונקצית עזר $\epsilon(h,k)$ עבור כל הנקודות (h,k) בסביבה קטנה של $(0,0)$ באופן הבא: ניקח $\epsilon(0,0) = 0$ ועבור כל $(h,k) \neq (0,0)$ ניקח

$$\epsilon(h,k) = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \tag{3}$$

הדיפרנציאביליות של f שקולה לתכחונה $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0$. מהתכונה הזו נובע ש $\lim_{n\to\infty} \epsilon(h_n, k_n) = 0$ עבור **כל** סדרה $\{(h_n, k_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ אשר מתכנסת ל $(0,0)$. לאור ההערה לעיל אין צורך לדרוש כי $(h_n, k_n) \neq (0,0)$. מ (3) והעובדה ש $\epsilon(0,0) = 0$ אנו רואים כי

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \epsilon(h,k) \cdot \sqrt{h^2 + k^2} \tag{4}$$

עבור כל הנקודות (h,k) מספיק קרובות ל $(0,0)$ וגם עבור $(h,k)=(0,0)$.
עלינו להראות שהגבול $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\phi(t_0+\alpha)-\phi(t_0)}{\alpha}$ קיים ושווה לביטוי המופיע באגף הימין של (2).
במילים אחרות, לאור משפט היינה, עלינו להראות שהגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(t_0+\alpha_n)-\phi(t_0)}{\alpha_n}$ קיים ושווה לאותו ביטוי הנ"ל עבור כל סדרה של מספרים שונים מאפס α_n אשר מתכנסת לאפס. תהי $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה כלשהי כזו. נגדיר $h_n=X(t_0+\alpha_n)-X(t_0)$ ו $k_n=Y(t_0+\alpha_n)-Y(t_0)$ עבור כל $n\in\mathbb{N}$. שתי הפונקציות X ו Y גזירות ב $t=t_0$ ולכן גם שתיהן רציפות באותה נקודה. מהעבודות האלה נקבל ש $\lim_{n\to\infty}h_n=0$ ו $\lim_{n\to\infty}k_n=0$ ו $\lim_{n\to\infty}h_n/\alpha_n=X'(t_0)$ וגם $\lim_{n\to\infty}k_n/\alpha_n=Y'(t_0)$. מההגדרות של ϕ, h_n ו k_n אנו רואים כי $\frac{\phi(t_0+\alpha_n)+\phi(t_0)}{\alpha_n}=\frac{f(x_0+h_n,y_0+k_n)-f(x_0,y_0)}{\alpha_n}$. בעזרת (4) אנו מקבלים שהביטוי הזה שווה ל

$$\frac{h_n}{\alpha_n}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{k_n}{\alpha_n}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\epsilon(h_n,k_n)\cdot\sqrt{h_n^2+k_n^2}/\alpha_n. \qquad (5)$$

כאשר n שואף ל ∞ שני האיברים הראשונים של (5) מתכנסים לשני הביטוים של אגף הימין של (2). לכן השלב האחרון אשר דרוש להשלים את הוכחת המשפט הוא להראות כי $\lim_{n\to\infty}\epsilon(h_n,k_n)\cdot\sqrt{h_n^2+k_n^2}/\alpha_n=0$. מכוון ש $\lim_{n\to\infty}\epsilon(h_n,k_n)=0$, מספיק להראות שהסדרה $\left\{\sqrt{h_n^2+k_n^2}/\alpha_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא חסומה. לשם כך נכתוב $\left|\sqrt{h_n^2+k_n^2}/\alpha_n\right|=\sqrt{h_n^2/\alpha_n^2+k_n^2/\alpha_n^2}$. מהתכונות שרשמנו לעיל, הסדרה הזו מתכנסת ל $\sqrt{X'(t_0)^2+Y'(t_0)^2}$. מכוון שכל סדרה מתכנסת היא גם סדרה חסומה גמרנו בזאת את ההוכחה. ∎

הערה: למרות שלא אמרנו זאת במפורש במהלך ההוכחה, ההנחות בניסוח המשפט מבטיחות ש f מוגדרת בסביבה מסוימת של p_0, וגם ש ϕ מוגדרת לא רק ב t_0 אלה בקטע מסוים המכיל את t_0. האם ברור לך מדוע?
למעשה העבדות האלה דרושות עבור ההוכחה.