מס׳ סטוד׳: ____________ מח׳ או פקולטה: ____________

שם משפחה: ____________ שם פרטי: ____________

אם ברצונך לקבל את תוצאתך המפורטת במבחן זו בדואר אלקטרוני, נא לרשום את הכתובת האלקטרונית שלך כאן באותיות ברורות:

EMAIL: ____________

בחן אמצע סמסטר " חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2מ " , 104011 ,

10.1.2007

הזמן לבחן: 90 דקות. אין להשתמש בחומר עזר (וגם לא במחשבון וגם לא בטלפון נייד/שעון). **אסור לצאת** מהחדר!
ענו על כל השאלות בגוף השאלון!
עליכם **לנמק** את הפתרונות לכל השאלות!
הניקוד לכל שאלה רשום על יד השאלה. סך הכל יש 103 נקודות!
נא להשתמש בעט כחול או שחור בלבד. אין להשתמש בעפרון וטיפקס.

1	
2	
3	
4	
סך הכל:	

---

1. **(21%)**

(א) $[7\%]$ יהי C קו הגובה של הפונקציה $f(x,y) = x^3+4xy-2y^3$ שעובר בנקודה $(-1,2)$. אזי הווקטור

$$\vec{a} = \boxed{}\,\hat{\mathbf{i}} + \boxed{}\,\hat{\mathbf{j}}$$

ניצב לעקום C בנקודה זו.

(ב) $[7\%]$ נתונה פונקציה $f(x,y) = x^3+4xy-2y^3$. הערך המקסימלי שיכולה לקבל הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(-1,2)$ הוא $\boxed{}$.

(ג) $[7\%]$ כדור קטן מוחזק בנקודה $(-1,2,f(-1,2))$ על המשטח $z = f(x,y) = x^3+4xy-2y^3$. משחררים את הכדור מבלי לדחוף אותו, והוא מתחיל לנוע על פני המשטח באותו כוון (ובאותה מגמה) כמו הווקטור

$$\vec{b} = \boxed{}\,\hat{\mathbf{i}} + \boxed{}\,\hat{\mathbf{j}} + \boxed{}\,\hat{\mathbf{k}}$$

רשמו כאן ובעמוד הבא את החישובים והנימוקים עבור שאלה 1:

עוד מקום לחישובים ונימוקים עבור שאלה 1.

2. **(25%)** המישור P עובר דרך הנקודות $M_1=(6,1,1)$, $M_2=(4,-1,0)$ ו- $M_3=(2,-1,1)$.
העקום Γ נתון בצורה פרמטרית $x=2t,\ y=e^{t-1},\ z=2\sqrt{t}+e^{t-1}$ כאשר $0\le t\le 10^6$.

(א) $[8\%]$ משוואת המישור P היא

$$\boxed{}\,x+\boxed{}\,y+\boxed{}\,z=\boxed{}$$

(ב) $[9\%]$ תהי $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודת החיתוך בין P ל- Γ. הקואורדינטות של M_0 הן

$$x_0=\boxed{}\ ,\quad y_0=\boxed{}\ ,\quad z_0=\boxed{}\ .$$

(ג) $[8\%]$ הזווית בין המשיק לעקום Γ בנקודת החיתוך M_0 לבין ההיטל של המשיק הזה על המישור P שווה ל- $\boxed{}$. (→ סמנו אות מ-A עד H מהרשימה הבאה. בסעיף זה אין צורך לנמק.)

$\boxed{\text{A}}\ \arccos\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\boxed{\text{B}}\ \arcsin\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\boxed{\text{C}}\ \arccos\frac{3}{4}$, $\boxed{\text{D}}\ \arcsin\frac{3}{4}$,
$\boxed{\text{E}}\ \arccos\frac{4}{9}$, $\boxed{\text{H}}\ \arcsin\frac{4}{9}$,

---

רשמו כאן ובעמוד הבא את החישובים והנימוקים עבור שאלה 2 סעיפי א׳ ו- ב׳:

(עוד מקום לחישובים ונימוקים עבור שאלה 2 סעיפי א' ו- ב'.)

3. (28%) נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \cos u + \sin v = x + y \\ \sin u + \cos v = x - y \end{cases} \qquad (1)$$

(א) $[9\%]$ נניח שמערכת המשוואות (1) מגדירה את u ואת v כפונקציות דיפרנציאביליות של x ו- y כאשר (x, y, u, v) בסביבה מספיק קטנה של הנקודה $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. חשבו את הערך של הנגזרת החלקית $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ כאשר $x = 1$, $y = 0$, ו- $u = v = \frac{\pi}{2}$.

(ב) $[8\%]$ בסעיף זה נניח שאותה המערכת (1) מגדירה את x ואת v כפונקציות דיפרנציאביליות של y ו- u, שוב כאשר (x, y, u, v) בסביבה מספיק קטנה של הנקודה $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. חשבו את הערך של הנגזרת החלקית $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ כאשר $x = 1$, $y = 0$, ו- $u = v = \frac{\pi}{2}$.

(ג) $[8\%]$ האם באמת נכון להניח שהמערכת (1) מגדירה את u ואת v כפונקציות דיפרנציאביליות של x ו- y כאשר (x, y, u, v) בסביבה מסויימת של $(1, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?
כמו-כן, האם באמת נכון להניח שהמערכת (1) מגדירה את x ואת v כפונקציות דיפרנציאביליות של y ו- u כאשר (x, y, u, v) בסביבה מסויימת של $(1, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?
נמקו את תשובותיכם.

(ד) $[3\%]$ אם גם בסעיף **(א)** וגם בסעיף **(ב)** קיבלתם אותו ערך עבור $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ כאשר $x = 1$, $y = 0$, ו- $u = v = \frac{\pi}{2}$, הסבירו מדוע למעשה חייבים לקבל את אותו ערך. אם קיבלתם דווקא ערכים שונים זה מזה עבור $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ בשני הסעיפים הנ"ל, הסבירו מדוע אין סתירה בתוצאות שלכם.

רשמו את הפתרון לשאלה 3 כאן ובעמוד הבא.

(המשך הפתרון של שאלה 3)

4. **(29%)** **(א)** $[10\%]$ נתונה הפונקציה $u(x,y)=7x+3y$. השתמשו בשיטת כופלי לגרנז' למציאת המקסימום והמינימום (המוחלטים) של u על העקום $\{(x,y):x^2+y^2=58\}$.

(רשמו כאן את הפתרון המנומק לסעיף א'.)

(ב) $[4\%]$ השלימו את ההגדרה הבאה. עליכם לבחור את הנוסח המקורי של ההגדרה, כלומר הנוסח שבו בכלל לא מזכירים נגזרות חלקיות.

נאמר שהפונקציה f של שני משתנים היא דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם

(ג) $[12\%]$ נתון שהפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ היא דיפרנציאבילית בנקודה (a,b). הוכיחו כי f רציפה באותה נקודה (a,b).

כמו-כן הוכיחו כי שתי הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ קיימות.

(רשמו כאן את הוכחות הדרושות עבור סעיף ג'.)

(ד) $[3\%]$ במשבצת הבאה רשמו דוגמה של פונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ שהיא לא דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$, למרות שהיא רציפה ב-$(0,0)$ ושתי הנגזרות $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ קיימות.

בסעיף זה אין צורך לנמק.

---- סוף השאלון ----

(במקרה הצורך אפשר לרשום בעמוד הזה, ובעמוד הבא, המשך של תשובה שלא הצלחתם להכניס במקום המיועד לכך בשאלון לעיל. אז חובה לציין לעיל שהמשך הפתרון נמצא בעמוד 9 או 10).