

(“Compressed” version.)

כדי לחסוך עצים, בגרסה זו אנו לא מכניסים את הדפים הריקים המיועדים לרישום פתרונות שהיו בגרסה המקורית של המבחן. כמו־כן כאן ההוראות לנבחנים מודפסים באופן יותר דחוס מההדפסה בגרסה המקורית.

חדו"א זמ' - 104011 - בחינה - מועד ב' 27.3.2009 - חלק ראשון

משך חלק זה: 90 דקות. אסור לצאת מחדר הבחינה בזמן חלק זה.  
נא לכתוב בכתב יד ברור. כתיבה לא ברורה עלולה לגרום אי קבלת ניקוד על שאלה.  
יש לרשום על כל אחד מעמודי המחברת את מספר הסטודנט.  
השימוש בכל חומר עזר אסור. כמו כן אסור השימוש במחשבון ו/או טלפון סלולרי.  
יש לנמק כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.

בהצלחה!

=====

**1.** [[12%]] הישר  $l_1$  נתון על ידי ההצגה הפרמטרית

$$x = 2 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + t, \quad -\infty < t < \infty$$

והישר  $l_2$  הוא החיתוך של שני המישורים  $x - y + 2z = 2$  ו-  $x - z = 1$ .  
(א) (4%) מצאו הצגה פרמטרית עבור הישר  $l_2$ .

(ב) (4%) מצאו את משוואת המישור  $\Pi$  אשר עובר דרך הנקודה  $(1, 0, -2)$  ומקביל לשני הישרים  $l_1$  ו-  $l_2$ .

(ג) (4%) האם הישרים  $l_1$  ו-  $l_2$  נחתכים? אם כן, מצאו את נקודת החיתוך שלהם.

=====

**2.** [[12%]] מצאו את מידות המלבן המוכל באליפסה

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

שצלעותיו מקבילים לצירי המערכת ושטחו מקסימלי.

=====

3. [[13%]] חשבו את השטף  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  של השדה

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + 4y^2 + 4z^2) \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$$

דרך המשטח

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

נמקו את כל הצעדים.

=====

4. [[13%]]

(א) (10%) חשבו את האינטגרל  $I = \int_L (z^3 \hat{i} + 3y^2 \hat{j} - x^3 \hat{k}) \cdot d\vec{r}$  כאשר  $L$  הוא המעגל:

$$L = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 1, y = 1\}$$

בכוון מנוגד לכוון השעון כאשר מסתכלים מהנקודה  $(0, 100, 0)$ .

(ב) (3%) מה ערכו של האינטגרל  $\int_L z^3 dx + 3y^2 dy - x^3 dz$  ?

=====

חדו"א 2מ' - 104011 - בחינה - מועד ב' 27.3.2009 - חלק שני

משך חלק זה: 90 דקות. אסור לצאת מחדר הבחינה בזמן חלק זה.  
נא לכתוב בכתב יד ברור. כתיבה לא ברורה עלולה לגרום אי קבלת ניקוד על שאלה.  
יש לרשום על כל אחד מעמודי המחברת את מספר הסטודנט.  
השימוש בכל חומר עזר אסור. כמו כן אסור השימוש במחשבון ו/או טלפון סלולרי.  
יש לנמק כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.

בהצלחה!

=====

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{.5} \quad [[11\%]] \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

האם  $f$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .  
(כמובן כאן, כמו בכל שאלה, עליך לנמק את התשובה).

=====

**.6** [[12%]]

(א) (4%) מצאו קבוע  $a$  כך שעבורו השדה הווקטורי

$$\vec{u}(x, y, z) = (x^2 + 5ay + 3yz) \hat{i} + (5x + 3axz - 2) \hat{j} + ((2 + a)xy - 4z) \hat{k}$$

מקיימת את התנאי  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$  בכל נקודה של  $\mathbb{R}^3$ .

(ב) (4%) עבור הערך של  $a$  שמצאת בסעיף (א), האם השדה  $\vec{u}$  משמר בקבוצה

$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 > 1\}$  ? (כמובן עליכם לנמק!)

(ג) (4%) עבור הערך של  $a$  שמצאת בסעיף (א), האם קיימת פונקציה  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש-  $\vec{\nabla} f = \vec{u}$  בכל נקודה של  $\mathbb{R}^3$  ? אם כן מצאו פונקציה כזו.

=====

**.7** [[12%]] הפונקציה  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל  $\mathbb{R}^3$ .

בנקודה  $(2, 1, 8)$  נתון ש-  $\vec{\nabla} f|_{(2,1,8)} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$  וגם ש-  $\frac{\partial^9}{\partial x^4 \partial y^5} f(2, 1, 8) = 33$ .

הפונקציה  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י  $g(x, y) = f(x^2 y, x, x^3 y^3)$ .

חשבו את  $\vec{\nabla} g$  בנקודה  $(1, 2)$ . הסבירו את כל שלבי החישוב.

=====

**.8** [[15%]] תהינה  $X(u, v)$  ו-  $Y(u, v)$  שתי פונקציות אשר מוגדרות בכל נקודה  $(u, v)$  ב-  $\mathbb{R}^2$ .

נתונה תת קבוצה  $A$  של המישור  $xy$ . נגדיר תת קבוצה  $B$  של המישור  $uv$  על ידי

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (X(u, v), Y(u, v)) \in A\} \quad (1)$$

נזכיר שבתנאים מתאימים קיימת פונקציה  $Z(u, v)$  כך שהנוסחה

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(X(u, v), Y(u, v)) Z(u, v) du dv \quad (2)$$

מתקיימת עבור כל פונקציה רציפה  $f$ .

(א) (3%) נסחו, באופן מדויק ומפורש, משפט אשר נותן תנאים מספיקים להבטיח שהנוסחה (2) אכן מתקיימת עבור כל פונקציה רציפה  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . עליכם לכלול נוסחה עבור הפונקציה המיוחדת  $Z(u, v)$  בניסוח המשפט.

(ב) (5%) נתבונן במקרה המיוחד כאשר  $X(u, v) = u$  ו-  $Y(u, v) = v^2$ . מצאו נוסחה פשוטה ומפורשת עבור  $Z(u, v)$  במקרה זה. כמו-כן נניח שהקבוצה  $A$  היא

$$A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$$

ושהקבוצה  $B$  מוגדרת ע"י הנוסחה (1).

ציירו את הקבוצות  $A$  ו-  $B$ . הערה: שימו לב כי הקבוצה  $B$  היא לא קשירה.

(ג) (3%) אם בוחרים את  $X(u, v)$  ו-  $Y(u, v)$  ו-  $A$  כמו בסעיף (ב) אז אחד מהתנאי המשפט שהתבקשת לנסח בסעיף (א) לא מתקיים. מהו התנאי הזה?

(ד) (4%) נניח שבחרים את  $X(u, v)$  ו-  $Y(u, v)$  ו-  $A$  כמו בסעיף (ב) וגם מחשבים את הקבוצה  $B$  והפונקציה  $Z(u, v)$  כמו בסעיף (ב). הוכיחו שבמקום הנוסחה (2) מתקיים נוסחה אחרת, כלומר

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_B f(X(u, v), Y(u, v)) Z(u, v) du dv \quad (3)$$

עבור כל פונקציה רציפה  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  אשר מקיימת  $f(x, y) = f(x, -y)$  עבור כל  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

האם הנוסחה (3) מתקיימת עבור כל פונקציה רציפה  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ?

=====.