מס׳ סטוד׳:											

מח׳ או פקולטה:											

שם משפחה:											

שם פרטי:											

אם ברצונך לקבל את תוצאתך המפורטת במבחן זו בדואר אלקטרוני, נא לרשום את הכתובת האלקטרונית שלך כאן באותיות ברורות:

EMAIL:																						

מדבקה

בחינה ביום 20.3.2007 (מועד ב')

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2מ 104011

חלק ראשון

הזמן לחלק זה: 90 דקות. אין להשתמש בחומר עזר
(גם לא במחשבון וגם לא בטלפון נייד/שעון).
אסור לצאת מהחדר לפני ההפסקה בין שני חלקי הבחינה.
ענו על כל השאלות בגוף השאלון.
בכל מקום שמופיע " כן ☐ , לא ☐ $[-N\%]$ " - כאשר N הוא מספר,
פרוש הדבר הוא שסימון X במשבצת הלא נכונה במקום זה יגרור
ניקוד **שלילי** של N נקודות.
עליכם **לנמק** כל חישוב או פתרון שבו התבקשתם לעשות כך.
כתבו בעט שחור או כחול כהה. אין להשתמש בעיפרון.
הניקוד לכל שאלה רשום על יד השאלה. סך הכל יש 100 נקודות.
חלק זה קובע 50 מהנקודות האלה. המשקל של החלק השני יהיה זהה.

1	
2	
3	
4	
סך הכל לחלק 1:	

בהצלחה!

----

1. **(13%)** הפונקציות $f(x,y)$ ו- $g(x,y)$ מוגדרות עבור כל $(x,y)\neq(0,0)$ ע"י הנוסחאות

$$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{ו-} \qquad g(x,y)=\arctan\frac{1}{x^2+y^2}\ .$$

אנו מגדירים $f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ אם הגבול קיים, ואחרת $f(0,0)=0$.
כמו-כן $g(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ אם הגבול קיים, ואחרת $g(0,0)=0$.

(א) $[2\%]$ הפונקציה f רציפה ב-$(0,0)$. כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$.
הפונקציה g רציפה ב-$(0,0)$. כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$.

(ב) $[6\%]$ הנגזרת $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ שווה ל- ☐ . הנגזרת $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ שווה ל- ☐ .
(בכל אחד מהמשבצות בשורה הקודמת סמנו אות מ-A עד L בהתאם לרשימה הבאה.)

$\boxed{\text{A}}=-e^{\sqrt{2}}$, $\boxed{\text{B}}$ הנגזרת לא קיימת , $\boxed{\text{C}}=-\frac{4}{\pi^2}$, $\boxed{\text{D}}=\frac{4}{\pi^2}$,
$\boxed{\text{E}}=\frac{\pi}{2}$, $\boxed{\text{H}}=0$, $\boxed{\text{J}}=1$, $\boxed{\text{K}}=-1$, $\boxed{\text{L}}=-\frac{\pi}{2}$.

(ג) $[5\%]$ הפונקציה f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$. כן ☐ , לא ☐ $[-1\%]$.
הפונקציה g דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$. כן ☐ , לא ☐ $[-1\%]$.

----

2. **(13%)** יהי Ω התחום $\Omega = \{(x,y) : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ בעל צפיפות (מסה ליחידת שטח) אחידה.
כלומר $\rho(x,y) = M$ עבור קבוע חיובי M.

(א) $[3\%]$ חשבו את המסה של Ω.

(ב) $[10\%]$ יהי $(\overline{x}, \overline{y})$ מרכז המסה של Ω. חשבו את $\overline{x}$.

רשמו את הפתרון לשאלה 2 בעמוד זה ובמקרה הצורך גם בעמוד הבאה. הראו את כל השלבים של החישובים.

(המשך הפתרון לשאלה 2.)

3. **(11%)** מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y,z) = 4x + 2y + z$

במשטח $S = \left\{(x,y,z) : \dfrac{x^2+y^2}{4} + z^2 = 1\right\}$.

רשמו פתרון **מנומק** לשאלה 3 בעמוד זה.

4. **(13%)** חשבו, בעזרת השלבים המפורטים להלן, את האינטגרל הקווי

$$J=\int_C\left(\frac{\cos^9\left(e^{-y^2}\right)}{(1+y^8)(5+y^{12})}+1x\right)\widehat{\mathbf{j}}\cdot d\vec{r}$$

כאשר C הוא עקום החיתוך של שני המשטחים $\{(x,y,z):x^2+z^2=49\}$ ו- $\{(x,y,z):y=z6\}$.
כוון האינטגרציה לאורך העקום C נבחר כך שהוא נראה כמו כוון נגד השעון כאשר מסתכלים על C מהנקודה $(0,100,0)$.

(א) $[1\%]$ הדרך הסבירה ביותר לחישוב האינטגרל J הוא: (סמנו את התשובה הנכונה ב- X)
☐ חישוב ישיר . ☐ בעזרת אחד המשפטים של אנליזה וקטורית.

(ב) $[5\%]$ כדי לחשב את J אצטרך להשתמש בהצגה פרמטרית מסויימת של עקום או משטח מתאים.
כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$.
במשבצת הבאה הסבירו מדוע אין לכם צורך בשום הצגה פרמטרית, או רשמו את הנוסחה המדויקת של ההצגה הפרמטרית הדרושה, וציינו את התחום של הפרמטר או פרמטרים.

☐

(ג) $[5\%]$ בסעיף זה עליכם לבחור אחת מהאופציות (i), (ii) ו- (iii).
בהתאם לתשובתי לסעיף **(ב)** אחשב את J כ-

(i) ☐ אינטגרל רגיל $\int_\alpha^\beta u(t)dt$, על הקטע $[\alpha,\beta]=$ $[\quad,\quad]$ של הפונקציה
$u(t)=$ ☐.

או (ii) ☐ אינטגרל כפול $\iint_D g(u,v)dudv$ על הקבוצה המישורית
$D=$ ☐

של הפונקציה $g(u,v)=$ ☐.

או (iii) ☐ אינטגרל משולש $\iiint_\Omega h(x,y,z)dxdydz$ על הקבוצה במרחב
$\Omega=$ ☐

של הפונקציה $h(x,y,z)=$ ☐.

(ד) $[2\%]$ חשבו את האינטגרל שבחרתם ותארתם בסעיף **(ג)**.
(הבהרה: בסעיף זה תקבלו ניקוד רק אם בחרתם את האינטגרל בסעיף **(ג)** באופן נכון.)

☐

(המשך החישוב של J.)

---------- סוף השאלון עבור החלק הראשון ----------

(במקרה הצורך אפשר לרשום בעמוד הזה, ובשני העמודים הבאים, המשך של תשובה שלא הצלחתם להכניס במקום המיועד לכך בשאלון לעיל. במקרה זה חובה לציין בשאלה המתאימה את מספר העמוד בו מופיע המשך הפתרון.)

									מח׳ או פקולטה:

										מס׳ סטוד׳:

									שם פרטי:

											שם משפחה:

אם ברצונך לקבל את תוצאתך המפורטת במבחן זו בדואר אלקטרוני, נא לרשום את הכתובת האלקטרונית שלך כאן באותיות ברורות:

EMAIL:																				

בחינה ביום 20.3.2007 (מועד ב׳)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2מ 104011

חלק שני

הזמן לחלק זה: **90** דקות. אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון וגם לא בטלפון נייד/שעון).

אסור לצאת מההדר לפני סיום חלק זה.

ענו על כל השאלות בגוף השאלון.

בכל מקום שמופיע " כן ☐, לא ☐ $_{[-N\%]}$ " - כאשר N הוא מספר, פרוש הדבר הוא שסימון X במשבצת הלא נכונה במקום זה יגרור ניקוד **שלילי** של N נקודות.

עליכם **לנמק** כל חישוב או פתרון שבו התבקשתם לעשות כך.

כתבו בעט שחור או כחול כהה. אין להשתמש בעיפרון.

הניקוד לכל שאלה רשום על יד השאלה. סך הכל יש 100 נקודות.

חלק זה קובע 50 מהנקודות האלה.

5	
6	
7	
סך הכל לחלק 2:	

בהצלחה!

---

5. (20%) נגדיר את המשטחים S_1 ו- S_2 ע"י $S_1 = \left\{(x,y,z) : z \geq 1, z = \sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$
ו- $S_2 = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2=1\}$.
המשטח S הוא האיחוד של S_1 ו- S_2. חשבו את השטף

$$\iint_S \left(\left(13xz + \frac{z\sin^7\left(\log(1+z^4)\right)}{\log(2+y^8)} \right)\widehat{\mathbf{i}} + 3yz\widehat{\mathbf{j}} + 15\widehat{\mathbf{k}} \right) \cdot d\vec{S}$$

כאשר $\widehat{n}$, ווקטור הניצב ל - S, פונה בכוון של התרחקות מציר ה-z.

(כלומר, בכל נקודה (x,y,z) ב-S הרכיב האופקי של $\widehat{n}$ הוא בעל הכוון והמגמה של הווקטור $x\widehat{\mathbf{i}}+y\widehat{\mathbf{j}}$.
למשל, $\widehat{n} = \widehat{\mathbf{i}}$ בנקודה $(1,0,\frac{1}{2})$.)

רשמו פתרון **מנומק** עבור שאלה 5 בעמוד הזה וגם, אם צריך, בעמוד הבא.

(המשך הפתרון של שאלה 5.)

6. **(15%)** נתונות שלוש פונקציות רציפות של משתנה אחד $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
יהי C העקום $C=\{(u(t),v(t),w(t)) : -1\le t\le 1\}$.
נתונה פונקציה רציפה של שלושה משתנים $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.
יהי S משטח אשר נתון ע"י הנוסחה $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g(x,y,z)=M\}$ כאשר M הוא קבוע.

(א) $[3\%]$ הערך המקסמלי והערך המינימלי של g על העקום C שווים בהתאמה לערך המקסימלי והערך המינימלי אשר מקבלת הפונקציה של משתנה אחד

$\phi(t) = \boxed{}$ בקטע $\boxed{} \le t \le \boxed{}$.

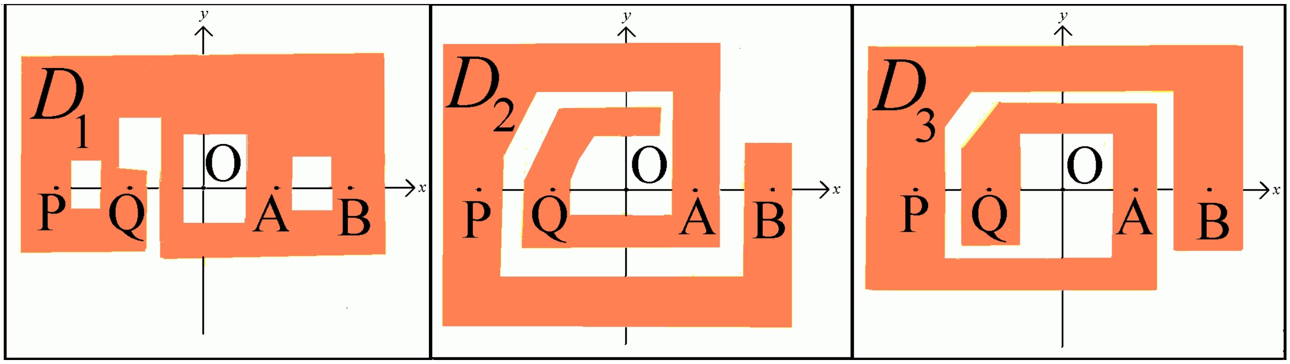
(הפונקציות g, u, v ו-w עשויות להופיע איכשהו בנוסחה שכתבתם עבור ϕ בשורה הקודמת.)

(ב) $[2\%]$ נניח כי $C\subset S$. אזי הערך המקסימלי והערך המינימלי של g ב- C שווים ל- $\boxed{}$

ול- $\boxed{}$ בהתאמה.

(ג) $[10\%]$ כעת נתון שהפונקציות הנ"ל u, v ו- w כולן גזירות והנגזרות שלהן שונות מ- 0 בכל נקודה.
כמו-כן נתון ש- g דיפרנציאבילית בנקודה $(u(0),v(0),w(0))=(x_0,y_0,z_0)$ וש- $\vec{\nabla}g(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$.
נניח שוב כי $C\subset S$.
הוכיחו כי המשיק ל- C בנקודה (x_0,y_0,z_0) ניצב לווקטור $\vec{\nabla}g(x_0,y_0,z_0)$.
בהוכחה שלכם **אסור** להשתמש בתכונות ידועות של הגרדיאנט של פונקציה של שלושה משתנים, כי בהוכחה שלכם אתם למעשה נותנים הוכחה חלקית של אחד מהתכונות האלו. מסיבות דומות גם אסור להשתמש באף משפט על כופלי לגרנז'.

7. **(15%)** תהינה D_1, D_2 ו- D_3 שלוש תת קבוצות פתוחות של $\mathbb{R}^2$ אשר מוצגות בתמונות הבאות



שימו לב כי, עבור כל אחת מהקבוצות D_j עבור $j = 1, 2, 3$, הנקודה $\mathrm{O} = (0,0)$ לא ב-D_j אבל ארבע הנקודות $\mathrm{A} = (1,0)$, $\mathrm{B} = (2,0)$, $\mathrm{Q} = (-1,0)$ ו- $\mathrm{P} = (-2,0)$ נמצאות כולן ב-D_j.

יהי $\vec{F}$ השדה הווקטורי אשר מוגדר ע"י $\vec{F}(x,y) = \dfrac{-y\widehat{\mathbf{i}} + x\widehat{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}$.

עבור כל אחת מהקבוצות D_j, כאשר $j = 1, 2, 3$, ענו על השאלות הבאות, ע"י סימון **כן** או **לא**, או ע"י רישום מספר, במשבצות המתאימות של הטבלה הבאה

(א) האם $\vec{F}$ הוא שדה משמר ב- D_j ?

(ב) האם קיימת פונקציה $\phi : D_j \to \mathbb{R}$ אשר מקיימת $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla}\phi(x,y)$ עבור כל נקודה $(x,y) \in D_j$, וכך ש- $\phi(1,0) = 0$?

בכל מקרה שבו עניתם "כן" לשאלה **(ב)** מצאו ורשמו את הערכים $\phi(2,0)$, $\phi(-1,0)$ ו- $\phi(-2,0)$ של הפונקציה הנ"ל ϕ.

	(א)	**(ב)**	$\phi(2,0)$	$\phi(-1,0)$	$\phi(-2,0)$
D_1	כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$	כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$			
D_2	כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$	כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$			
D_3	כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$	כן ☐ , לא ☐ $[-\frac{1}{2}\%]$			

אם חישבתם את $\phi(2,0)$ עבור לפחות אחת מהקבוצות, הסבירו איך קיבלתם את תשובתכם:

---------- סוף השאלון ----------

(בעמודים הבאים יש מקום לכתיבה נוספת, אם צריך.)

(במקרה הצורך אפשר לרשום בעמוד הזה, ובעמודים הבאים, המשך של תשובה שלא הצלחתם להכניס במקום המיועד לכך בשאלון לעיל. במקרה זה חובה לציין בשאלה המתאימהח את מספר העמוד בו מופיע המשך הפתרון.)