

חדו"א זמ' - 104011 - בחינה - מועד א' 22.2.2009 - חלק ראשון

כדי לחסוך עצים, בגירסה זו אנו לא מכניסים את הדפים הריקים המיועדים לרישום פתרונות שהיו בגירסה המקורית של המבחן. כמו-כן כאן ההוראות לנבחנים מודפסים באופן יותר דחוס מההדפסה בגירסה המקורית.)

משך חלק זה: 90 דקות. אסור לצאת מחדר הבחינה בזמן חלק זה. נא לכתוב בכתב יד ברור. כתיבה לא ברורה עלולה לגרור אי קבלת ניקוד על שאלה. יש לרשום על כל אחד מעמודי המתברת את מספר הסטודנט. השימוש בכל חומר עזר אסור. כמו כן אסור השימוש במחשבון ו/או טלפון סלולרי. יש לנמק כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב. בהצלחה!

=====

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. [[10%]] נתונה הפונקציה

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

(כמובן כאן, כמו בכל שאלה, עליך לנמק את התשובה.)

=====

2. [[14%]] נתונים קבועים חיוביים a, b, c ו- γ .

הצפיפות בכל נקודה (x, y, z) של הגוף $V = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$ נתונה על ידי

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^\gamma$$

א. (8%) חשבו את המסה של הגוף V .

ב. (6%) תהיה הנקודה (x_0, y_0, z_0) מרכז הכובד של הגוף V . חשבו את z_0 .

=====

3. [[14%]] יהיה העקום C החיתוך של שני המשטחים $y^2 + z^2 = 1$ ו- $x + y + z = 1$.

א. (5%) מצאו הצגה פרמטרית עבור C .

ב. (9%) נתון השדה הווקטורי $\vec{F}(x, y, z) = \arctan\left(\frac{1}{x^4 + 1}\right) \hat{i} - z^3 \hat{j} + y^3 \hat{k}$ מצאו את ערכו

של האינטגרל הקווי $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ כאשר כוון האינטגרציה לאורך C נראה נגד כוון השעון אם אנו מסתכלים על C מהנקודה $(-20, 0, 0)$.

=====

4. [[12%]] נתונה פונקציה של שני משתנים $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

א. (3%) הגדירו באופן מפורש ומדויק את המושג: f רציפה בנקודה (x_0, y_0) .

ב. (5%) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

נניח ש- f רציפה בכל נקודה של המישור. אזי, עבור כל קבוע c , כל אחת משתי הפונקציות של משתנה אחד $u(t) := f(t, c)$ ו- $v(t) := f(c, t)$ היא רציפה בכל נקודה $t \in \mathbb{R}$.

ג. (4%) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

נניח שעבור כל קבוע c , כל אחת משתי הפונקציות של משתנה אחד $u(t) := f(t, c)$ ו- $v(t) := f(c, t)$ היא רציפה בכל נקודה $t \in \mathbb{R}$.

אזי f רציפה בכל נקודה של המישור.

=====

חדו"א 2מ' - 104011 - בחינה - מועד א' 22.2.2009 - חלק שני

(ההוראות שרשמנו עבור חלק זה היו זהות להוראות להוראות לחלק הראשון.) **בהצלחה!**

=====

5. [[10%]] יהיו \vec{A} ו- \vec{B} שני ווקטורים ב- \mathbb{R}^3 המקיימים $\vec{A} \neq -\vec{B}$ ו-

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| \neq 0$$

יהיה \vec{C} ווקטור הסכום $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. תהיה α הזווית בין \vec{A} ו- \vec{C} , ותהיה β הזווית בין \vec{B} ו- \vec{C} . הוכיחו כי $\alpha = \beta$.

=====

6. [[12%]] יהיה C העקום במישור xy שהוא החלק של הפרבולה $y = x^2$ המחבר את הנקודות $(1, 1)$ ו- $(2, 4)$.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ נתונה על ידי הנוסחה } f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1+4|y|}}$$

יהיה המשטח S מורכב מכל הנקודות (x, y, z) הנמצאות בין מישור xy והגרף של f , ושעבורן (x, y) נמצאת על C .

חשבו את השטח של S .

=====

7. [[14%]] יהיה D התחום במישור xz הנתון על-ידי :

$$D = \{(x, z) : 0 < x \leq 4, x^2 + z^2 \geq 4, -x \leq z \leq x\}$$

א. (3%) ציירו את התחום D .

ב. (5%) יהיה V התחום ב- \mathbb{R}^3 המתקבל מסיבוב מלא של התחום D סביב ציר z .

יהיה השדה $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ כאשר $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ו- $r = \|\vec{r}\|$.

חשבו את $\text{div}\vec{F}$.

ג. (6%) יהיו V ו- \vec{F} כמו בסעיף ב. יהיה S משטח אשר מכיל את כל השפה של התחום V פרט לחלק השפה שנמצא על פני הכדור $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. חשבו את השטף של \vec{F} דרך המשטח S , כאשר הנורמל על S פונה החוצה מ- V .

=====

8. [[14%]] תהינה שתי הפונקציות $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ נתונות ע"י הנוסחות $f(x, y) = y$ ו- $g(x, y) = x^3 - 3x + 2y^3$. יהיה C קו הגובה של g המורכב מכל הנקודות (x, y) ב- \mathbb{R}^2 אשר מקיימות $g(x, y) = 0$.

א. (5%) מצאו את כל הנקודות (x, y) על קו הגובה C שבהן הווקטורים $\vec{\nabla}f(x, y)$ ו- $\vec{\nabla}g(x, y)$ מקבילים זה לזה.

ב. (1%) מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה f על הקבוצה C .

ג. (5%) יהי Γ החלק של C אשר נמצא בין שתי הנקודות $(-3, \sqrt[3]{9})$ ו- $(1, 1)$. מצאו את הערך המקסימלי של f על Γ .

ד. (2%) נסחו באופן מפורש ומדויק משפט אשר בעזרתו ניתן למצוא את התשובה לסעיף ג.

(אם כבר נסחתם משפט כזה - באופן ברור ומדויק - כחלק של הפתרון לסעיפים קודמים, אז מספיק לפנות אותנו לניסוח זה.)

ה. (1%) נסחו באופן מפורש ומדויק משפט אשר בעזרתו ניתן למצוא את התשובה לסעיף ב.

=====