

(ג) [3%] במשבצת הבאה חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(0, 0)$ בכיוון $\hat{a} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}$ עבור כל $\alpha \in [0, 2\pi]$.

(ד) [3%] האם f דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$? כן , לא . [−1%] רשמו נימוק עבור תשובה זו במשבצת הבאה.

2. (12%) נתון המשטח

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 36, y \geq 0, -4 \leq z \leq 4\}$$

נבחר פרמטריזציה $\vec{R}(\theta, z) = X(\theta, z)\hat{i} + Y(\theta, z)\hat{j} + Z(\theta, z)\hat{k}$ שלו בצורה:

$$\vec{R}(\theta, z) = 6 \cos \theta \hat{i} + 6 \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}$$

(א) [2%] תחום הפרמטרים הוא:

$$D = \left\{ (\theta, z) : \boxed{} \leq \theta \leq \boxed{}, \boxed{} \leq z \leq \boxed{} \right\}$$

(ב) [10%] מבקשים לחשב את השטף של השדה:

$$\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{i} + yz\hat{j} + z^2\hat{k}$$

דרך המשטח S הנ"ל, כאשר לנורמל למשטח בנקודה $(0, 6, 0)$ יש רכיב y שלילי.

$$\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z = \boxed{} \hat{i} + \boxed{} \hat{j} + \boxed{} \hat{k}$$

$$\vec{F}(X(\theta, z), Y(\theta, z), Z(\theta, z)) = \boxed{} \hat{i} + \boxed{} \hat{j} + \boxed{} \hat{k}$$

האם הווקטור הנורמל הנקבע ע"י הביטוי $\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z$ מכוון בכיוון הנדרש? כן , לא . [−1%] לאור כל התשובות הקודמות נקבל ש-

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \boxed{} dzd\theta = \boxed{}$$

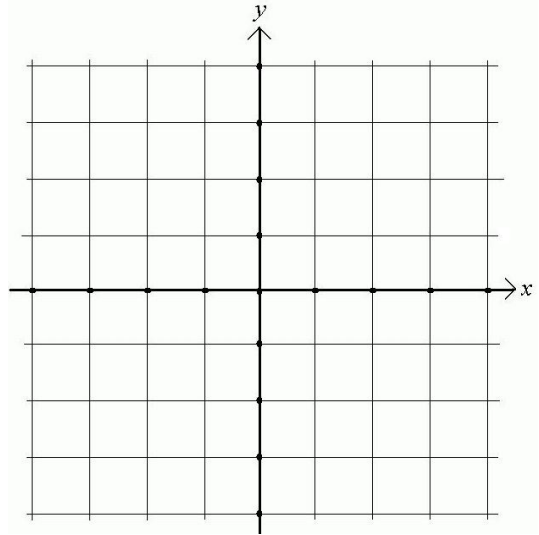
3. (13%) הצפיפות $\rho = \rho(x, y, z)$ של הכדור $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$ פרופורציונלית למרחק מהראשית $(0, 0, 0)$. כלומר $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ עבור קבוע חיובי k . מצאו את מסת הכדור ואת קואורדינטת z של מרכז הכובד שלו.

רשמו כאן ובעמוד הבא את החישובים והנימוקים עבור שאלה 3:

(עוד מקום, אם צריך, לחישובים ונימוקים עבור שאלה 3.)

4. (13%) יהי D התחום במישור xy הכלוא בין הישרים $x = -4$, $y = 2$ ו- $y = x$.

(א) [3%] ציירו את התחום D .



(ב) [10%] מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x, y) = e^{x-y}(6y^2 - 3x^2)$ בתחום D .

(עוד מקום, אם צריך, לפתרון עבור שאלה 4.)

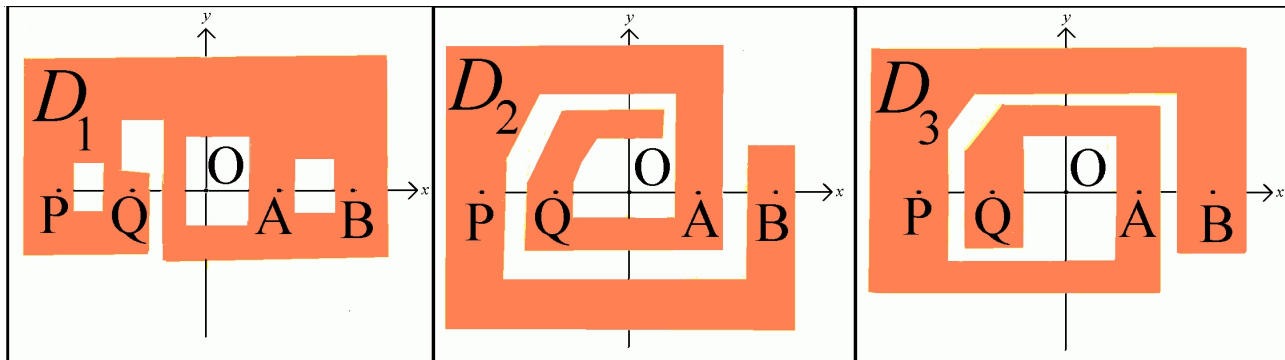
----- סוף השאלון עבור החלק הראשון -----

(במקרה הצורך אפשר לרשום בעמוד הזה, ובעמוד הבא, המשך של תשובה שלא הצלחתם להכניס במקום המיועד לכך בשאלון לעיל. במקרה זה חובה לציין בשאלה המתאימה את מספר העמוד בו מופיע המשך הפתרון.)

מקום לחישובים ונימוקים עבור שאלה 5.

נא לא לשכוח לרשום את התשובה הסופית במשבצות בסוף העמוד הקודם.

6. (19%) תהינה D_1, D_2 ו- D_3 שלוש תת קבוצות פתוחות של \mathbb{R}^2 אשר מוצגות בתמונות הבאות



שימו לב כי, עבור כל אחת מהקבוצות D_j עבור $j = 1, 2, 3$, הנקודה $O = (0, 0)$ לא ב- D_j אבל ארבע הנקודות $A = (1, 0)$, $B = (2, 0)$, $Q = (-1, 0)$ ו- $P = (-2, 0)$ נמצאות כולן ב- D_j .

יהי השדה הווקטורי אשר מוגדר ע"י $\vec{F}(x, y) = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$.

עבור כל אחת מהקבוצות D_j , כאשר $j = 1, 2, 3$, ענו על השאלות הבאות, ע"י סימון **כן** או **לא**, או ע"י רישום מספר, במשבצות המתאימות של הטבלה הבאה

(א) האם \vec{F} הוא שדה משמר ב- D_j ?

(ב) האם קיימת פונקציה $\phi : D_j \rightarrow \mathbb{R}$ אשר מקיימת $\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla}\phi(x, y)$ עבור כל נקודה $(x, y) \in D_j$, וכך ש- $\phi(1, 0) = 0$?

בכל מקרה שבו עניתם "כן" לשאלה (ב) מצאו ורשמו את הערכים $\phi(2, 0)$, $\phi(-1, 0)$ ו- $\phi(-2, 0)$ של הפונקציה הנ"ל ϕ .

$\phi(-2, 0)$	$\phi(-1, 0)$	$\phi(2, 0)$	(ב)	(א)	
			$[-\frac{1}{2}\%]$ <input type="checkbox"/> לא , <input type="checkbox"/> כן	$[-\frac{1}{2}\%]$ <input type="checkbox"/> לא , <input type="checkbox"/> כן	D_1
			$[-\frac{1}{2}\%]$ <input type="checkbox"/> לא , <input type="checkbox"/> כן	$[-\frac{1}{2}\%]$ <input type="checkbox"/> לא , <input type="checkbox"/> כן	D_2
			$[-\frac{1}{2}\%]$ <input type="checkbox"/> לא , <input type="checkbox"/> כן	$[-\frac{1}{2}\%]$ <input type="checkbox"/> לא , <input type="checkbox"/> כן	D_3

אם חישובתם את $\phi(2, 0)$ עבור לפחות אחת מהקבוצות, הסבירו איך קיבלתם את תשובתכם:

7. (21%) (א) [5%] נתונה פונקציה $f(x, y)$ המוגדרת בתחום D . תהי (x_0, y_0) נקודה פנימית של D . בחרו את הטענה הנכונה מהרשימה הבאה, ובהתאם לכך סמנו אות מ-A עד E במשבצת זו ← . (בסעיף זה אין צורך לנמק.)

A (אמרנו לכם בזמן הבחינה שיש למחוק את התשובה A מרשימת התשובות.)

B אם הנגזרת החלקית $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ קיימת ב- (x_0, y_0) אזי נובע בהכרח שגם הנגזרת החלקית $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

קיימת ב- (x_0, y_0) ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

C אם הנגזרות החלקיות $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ קיימות שתיהן ב- (x_0, y_0) אזי הן בהכרח שוות זו לזו ב- (x_0, y_0) .

D קיימת פונקציה f כך שכל הנגזרות שלה עד סדר שתיים קיימות בסביבה מסויימת של הנקודה

(x_0, y_0) וכולן רציפות ב- (x_0, y_0) , אבל $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

E כל טענה אחרת ברשימה זו היא טענה לא נכונה.

(ב) [6%] נתון שדה ווקטורי $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$ אשר מוגדר בקבוצה פתוחה ב- \mathbb{R}^3 אשר מכילה את הנקודה (x_0, y_0, z_0) .

נסחו והוכיחו משפט אשר נותן תנאים מספיקים (כמובן תנאים לא טריביאליים) על הרכיבים Q, P ו- R של \vec{F} לקיום הנוסחה

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

בנקודה (x_0, y_0, z_0) .

ניסוח המשפט

הוכחת המשפט

(אפשר להמשיך בעמוד הבא.)

(ג) [5%] יהיו a, b, c קבועים חיוביים, יהי S המשטח הסגור: $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = b^2\}$, ויהי \vec{F} השדה הוקטורי $\vec{F}(x, y, z) = ax\hat{i} + (by + cz)\hat{j} + \nabla \times (5x^2yz\hat{i} + 24\sin^2 z\hat{j} + 7xe^{y^2}\hat{k})$.

חשבו את האינטגרל המשטחי $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ כאשר וקטור הנורמל למשטח S פונה כלפי חוץ.

רמז: ניתן להשתמש באחד הסעיפים הקודמים של שאלה זו.

(הסעיף האחרון של שאלה זו בעמוד הבא,)

(ד) [5%] יהי \vec{G} שדה וקטורי מוגדר בכל \mathbb{R}^3 . נתון שכל רכיב של \vec{G} בעל נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בכל נקודה $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. אבל הנגזרות האלו לא רציפות בנקודה $(0, 0, 0)$. ידוע כי $\vec{G}(0, 0, 0) = -3\hat{k}$. נתון השדה $\vec{F}(x, y, z) = ax\hat{i} + (by + cz)\hat{j} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$. יהיו a, b, c אותם קבועים חיוביים ויהי S אותו המשטח אשר הוגדרו בסעיף (ג). חשבו את $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ או הסבירו מדוע הפעם אין לנו מספיק אינפורמציה בכדי לחשב את האינטגרל הזה.

----- סוף השאלון -----

(במקרה הצורך אפשר לרשום בעמוד הזה, ובעמודים הבאים, המשך של תשובה שלא הצלחתם להכניס במקום המיועד לכך בשאלון לעיל. במקרה זה חובה לציין בשאלה המתאימה את מספר העמוד בו מופיע המשך הפתרון.)

