חדוו"א 2מ. סיכום הרצאה ראשונה.

זו רק גירסה פרלימינארית. צריך, בין היתר, לתקן את העברית ולהוסיף מספר ציורים.

$\mathbb{R}$ קבוצת כל המספרים הממשיים.

$\mathbb{R}^2$ קבוצת כל הזוגות הסדורים (a,b) של מספרים ממשיים.

כל איבר (a,b) של $\mathbb{R}^2$ מזדהה עם נקודה במישור.

הנקודה נמצאת במרחק $|a|$ מציר ה - y ובמרחק $|b|$ מציר ה- x.

הקבוצה כולה $\mathbb{R}^2$ מזדהה עם כל המישור.

$\mathbb{R}^3$ קבוצת כל השלשות הסדורות (a,b,c) של מספרים ממשיים.

כל איבר (a,b,c) של $\mathbb{R}^3$ מזדהה עם נקודה במרחב (כלומר מרחב תלת מימדי).

הנקודה נמצאת במרחק $|a|$ ממיחור המכיל את צירי y ו- z, כמו כן היא במרחק $|b|$ מישור של הצירים x ו- z ובמרחק $|c|$ ממישור של הצירכים x ו- y.

לכן הקבוצה כולה $\mathbb{R}^3$ מזדהה עם כל המרחב.

$\mathbb{R}^4$ קבוצת כל הרביעות הסדורות (a,b,c,d) של מספרים ממשיים.

$\mathbb{R}^5$ קבוצת כל החמישיות הסדורות (a,b,c,d,e) של מספרים ממשיים.

לכל מספר n שלם וחיובי, $\mathbb{R}^n$ קבוצת כל ה n-יות הסדורות $(a_1,a_2,....a_n)$ של מספרים ממשיים.

להבדיל מהקרים $n=1,2,3$, כאשר $n\geq 4$ אין לנו דרך פשוטה לזהות את $\mathbb{R}^n$ עם קבוצה גאומטר-ית. אבל למרות זאת הקבוצה $\mathbb{R}^n$ משחקת תפקידים חשובים ומועילים למשל בפיסיקה, בכלכלה, ובתחומים אחרים.

הגדרת ווקטורים ב- $\mathbb{R}^3$. (יש הגדרה מאד דומה ב- $\mathbb{R}^2$).

קודם נגדיר "חץ". חץ הוא קטע ישר מכוון, מנקודה ראשונה (a_1,a_2,a_3) שניקראת "הזנב" של החץ לנקודה שניה (b_1,b_2,b_3) אשר נקראת "הראש" של החץ.

הגדרה קצת לא מדויק:

ווקטור זה חץ. אבל אם שני חיצים שונים בעלי אותו אורך ובעלי אותו כוון (כלומר מקבילים זה לזה) והם גם בעלי אותה מגמה, אזי הם נחשבים כאותו ווקטור.

מה זה מגמה? (sense באנגלית).

נסביר בעזרת תמונות:

שני החיצים האלו הם בעלי אותו כוון, וגם בעלי אותו מגמה.

שני החיצים האלו הם בעלי אותו כוון, אבל המגמות שלהם הפוכות זו לזו.

הגדרה מדויקת: נגיד ששני חיצים שקולים זה לזה אם הם בעלי אותו אורך, אותו כוון ואותה מגמה.

Two arrows are equivalent to each other if they have the same length, the same direction and the same sense.

ווקטור ב- $\mathbb{R}^3$ הוא קבוצה שמכיל חץ מסויים וגם **כל** החיצים האחרים שהם שקולים לו.

כל חץ בקבוצה זו נחשב כ"נציג" של הווקטור. כלומר לכל ווקטור יש אינסוף נציגים שונים, חיצים אשר כולם שקולים זה לזה.

במקום "חץ" (arrow) אפשר להגיד "קטע ישר מווכן" (directed line segment). (זה יותר פורמלי).

סימון עבור ווקטורים:

מקובל לסמן ווקטור ב- $\mathbb{R}^3$ בסימון $\vec{A}$ או $\vec{B}$ או אות אחר גדול או קטן עם חץ. לפעמים במקום חיצים משתמשים באותות מודגשות, כגון $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ וכו'.

נתון ווקטור כלשהו $\vec{A}$ ב- $\mathbb{R}^3$, ניקח חץ כלשהו שהוא נציג של $\vec{A}$ ונזיז אותו (כמובן מבלי לשנות את האורך הכוון והמגמה שלו) עד שהזנבו נמצא בנקודה הראשית $(0,0,0)$. או, במילים אחרות, נבחר את החץ המייצג את $\vec{A}$ שזנבו נמצא ב- $(0,0,0)$. ברור שיש רק חץ אחד בעל התכונות האלה. תהי

הנקודה (a,b,c) שבה נמצא הראש של אותו חץ. הווקטור $\vec{A}$ קובע את הנקודה (a,b,c) באופן חד-משמעי. מצד שני הנקודה (a,b,c) קובעת את הווקטור $\vec{A}$ באופן חד-משמעי. נציין את הקשר הזה בין הווקטור $\vec{A}$ לבין הנקודה (a,b,c) ע"י הנוסחה

$$\vec{A} = [a,b,c] \tag{1}$$

(הסימון ב- (1) עם סוגריים מרובעים כניראה לא מופיע ברוב הספרים בנושא אה. אבל הוא מאד נות. נתיחס לזה כסימון לא רשמי ופרטי שלנו. ראיתי את הסימון הזה ברשימות שכתב ידידי פרופ' דוד צילג לפני הרבה שנים עבור מקצוע שקראו לו אז "מתמטיקה 1-א". דוד אומר לי שהשתמשו באותו סימון בקורסים שלמד כסטודנט באוניברסיטת תל אביב.)

באופן דומה נשתמש בסימון $[a,b]$ עבור הווקטור ב- $\mathbb{R}^2$ שאחד מנציגים שלו הוא החץ מהנקודה $(0,0)$ לנקודה (a,b).

יש שלושה ווקטורים חשובים ב- $\mathbb{R}^3$. הם $\widehat{\mathbf{i}} := [1,0,0]$, $\widehat{\mathbf{j}} := [0,1,0]$ ו- $\widehat{\mathbf{k}} = [0,0.1]$.

ב- $\mathbb{R}^2$ אנו גם מסמנים $\widehat{\mathbf{i}} = [1,0]$ ו- $\widehat{\mathbf{j}} = [0,1]$.

בסימון של ווקטורים השימוש ב"כובע" $\widehat{\ }$ במקום חץ מקובל עבור ווקטור בעל אורך 1. ווקטור כזה נקרא גם "ווקטור יחידה" (unit vector).

אורך של ווקטור: עבור כל ווקטור $\vec{A}$ ב- $\mathbb{R}^n$, כאשר $n = 2$ או 3, מסמנים את האורך של $\vec{A}$ ע"י הסימון $\left\|\vec{A}\right\|$. (לפעמים, במקום זה, רושמים $\left|\vec{A}\right|$.) לפעמים במקום לקרוא למספר $\left\|\vec{A}\right\|$ "האורך של $\vec{A}$", קוראים לו "ערך המוחלט" של $\vec{A}$, או "הנורמה" של $\vec{A}$ או "הנורמה האוקלידית" של $\vec{A}$ (the euclidean norm of $\vec{A}$).

אם $\vec{A} = [a_1,a_2]$ אז ברור ממשפט פיתגורס כי $\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. כמו כן, אם $\vec{A} = [a_1,a_2,a_3]$ אז שני הפעלות של משפט פיתגורס נותנים לנו כי $\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

אנו צריכים ללמוד על שש פעולות שונות על ווקטורים. לכל פעולה יש שתי הגדרות, הגדרה אלגברית והגדרה גאמטרית. נצטרך לבדוק ששתי הגדרות נותנות אותו דבר. אחר כך נוכל לנצל את העובדה הזו לכל מיני דברים מועילים.

רשימת הפעולות:
חיבור של שני ווקטורים,
כפל של ווקטור בסקלר,
הפרש של שני ווקטורים,
מכפלה סקלרית (dot product) של שני ווקטורים,
מכפלה ווקטורית (cross product) של שני ווקטורים,
מכפלה מערבת (scalar triple product) של שלושה ווקטורים.

חיבור של ווקטורים.

זמנית נשתמש בשני סימונים "$+_a$" ו- "$+_g$" . אחר כך נשכח מהסימונים האלו.

הגדרה אלגברית: נתונים שני ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$. אם $\vec{A} = [a_1,a_2,a_3]$ ו- $\vec{B} = [b_1,b_2,b_3]$ אז הסכום האלגברי של $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הוא ווקטור שנסמן ב- $\vec{A} +_a \vec{B}$. הוא נתון ע"י הנוסחה

$$[a_1,a_2,a_3] +_a [b_1,b_2,b_3] = [a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3]$$

הגדרה גאומטרית: נתונים שני ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$. הסכום הגאומטרי של $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הוא ווקטור שנסמן ב- $\vec{A} +_g \vec{B}$. כדי לקבל את $\vec{A} +_g \vec{B}$ ניקח חץ שמייצג את $\vec{A}$ וחץ שמייצג את $\vec{B}$ ונמקם אותם כך שראש של החץ של $\vec{A}$ והזנב של החץ של $\vec{B}$ נמצאים באותה נקודה. אז $\vec{A} +_g \vec{B}$ הוא ווקטור נתון ע"י החץ מהזנב של החץ של $\vec{A}$ אל הראש של החץ של $\vec{B}$.

משפט 1. עבור כל זוג של ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ מתקיים $\vec{A}+_a\vec{B}=\vec{A}+_g\vec{B}$.

הוכחה או הסבר: נשתמש ב"קלובים". (ראו מצגת שהכנתי להסביר את המשפט הזה.)
אולי כדאי לחשוב קודם על התוצאה האנלוגית ב $\mathbb{R}^2$.

אחרי שיודעים שמשפט זה נכון מפסיקים להשתמש בסימונים $\vec{A}+_a\vec{B}$ ו-$\vec{A}+_g\vec{B}$, ובמקום שניהם פשוט רושמים $\vec{A}+\vec{B}$.

זווית בין שני ווקטורים.

נתונים שני וקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ ב- $\mathbb{R}^2$ או ב- $\mathbb{R}^3$. נמקם את החיצים המיצגים אותם כך שזנבותיהם נמצאים באותה נקודה. נסמן את הזווית בין שני החיצים ע"י $\measuredangle\vec{A},\vec{B}$. הגדרה זו עדיין לא חד-ממשמעית כי, אם הזווית בין שני החיצים שווה ל- θ רדיאנים אז אפשר לקחת גם את $2\pi-\theta$ כזווית בין החיצים.
ציור
כדי למנוע דו-משמאות כזו נסכים שתמיד נבחור את $\measuredangle\vec{A},\vec{B}$ כך ש- $0\le\measuredangle\vec{A},\vec{B}\le\pi$.

תרגיל 1.

(i) הראו בעזרת ציורים שכל ווקטור $\vec{A}=[a,b,c]$ מקיים

$$a=\left\|\vec{A}\right\|\cos\measuredangle\vec{A},\widehat{\mathbf{i}}\ ,\ \ b=\left\|\vec{A}\right\|\cos\measuredangle\vec{A},\widehat{\mathbf{j}}\ \text{ ו- }\ c=\left\|\vec{A}\right\|\cos\measuredangle\vec{A},\widehat{\mathbf{k}}\ . \tag{2}$$

(ii) מצאו נוסחה אשר מקשר בין הזוויות $\measuredangle\vec{A},\vec{B}$ ו- $\measuredangle(-\vec{A}),\vec{B}$ כאשר $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הם ווקטורים שונים מ $\vec{0}$. לא ניתן הוכחה פורמלית. ההוחה היא תרגיל על משולשים דומים. או אפשר להעזר בתרגיל הבא.

כפל בסקלר: יהי $\vec{A}=[a_1,a_2,a_3]$ ווקטור כלשהו, ויהי λ סקלר כלשהו, כלומר מספר ממשי.
הגדרה אלגברית: $\lambda_a\vec{A}=[\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3]$.

הגדרה גאומטרית: $\lambda_g\vec{A}$ הוא ווקטור מקביל ל- $\vec{A}$. האורך של $\lambda_g\vec{A}$ שווה ל- $|\lambda|$ כפול האורך של $\vec{A}$. כלומר $\left\|\lambda_g\vec{A}\right\|=|\lambda|\left\|\vec{A}\right\|$.

אם $\lambda>0$ אז $\lambda_g\vec{A}$ ו- $\vec{A}$ בעלי אותה מגמה. אם $\lambda<0$ אז $\lambda_g\vec{A}$ בעל מגמה הפוכה למגמה של $\vec{A}$.

אם $\lambda=0$ אז לא צריך להגדיר את הכוון או המגמה של $\lambda_g\vec{A}$, ולמעשה גם אי-אפשר לעשות כך כי במקרה זה $\lambda_g\vec{A}$ בעל אורך 0 ולכן הוא ווקטור האפס $\vec{0}=[0,0,0]$.

משפט 2. $\lambda_g\vec{A}=\lambda_a\vec{A}$.

ההוכחה היא תרגיל על משולשים דומים. או אפשר להעזר בתרגיל הבא.

תרגיל 2. מצאו נוסחה אשר מקשר בין $\measuredangle\vec{A},\vec{B}$ ו- $\measuredangle(\lambda_g\vec{A}),\vec{B}$, כאשר $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הם ווקטורים שונים מ $\vec{0}$ ו- $\lambda>0$. בעזרת הנוסחה הזו והתוצאות של תרגיל 1, הוכיחו את משפט 2.

אחרי שידוע לנו שמשפט זה נכון נשכח מהסימונים $\lambda_g\vec{A}$ ו- $\lambda_a\vec{A}$, ובמקום שניהם פשוט נכתוב $\lambda\vec{A}$.

ווקטור הפוך והפרש של שני ווקטורים:

נתונים שני ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$. נגדיר את הווקטור ההפוך ל- $\vec{A}$ ע"י $-\vec{A}=(-1)\vec{A}$. כמו-כן נגדיר את ההפרש בין $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ ע"י הנוסחה $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-1)\vec{B}$.
מהמשפטים הקודמים ברור כי $-[a_1,a_2,a_3]=[-a_1,-a_2,-a_3]$, וגם ש-

$$[a_1,a_2,a_3]-[b_1,b_2,b_3]=[a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3]. \tag{3}$$

גם ברור מההגדרות כי הווקטורים $\vec{A}$ ו- $-\vec{A}$ בעלי אותו אורך ואותו כוון. המגמות שלהם הפוכות זו לזו.

נובע מ-(3) כי

$$\vec{A}+\left(\vec{B}-\vec{A}\right)=\vec{B} \tag{4}$$

(שימו לב שאותו סימון "$-$", אשר מופיע גם באגף השמאלי וגם באגף הימיני של הנוסחה (3), הוא בעל שני משמעויות שונות בשני האגפים של הנוסחה.)

המכפלה הסקלרית:

הגדרה אלגברית: נתונים שני ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$. אם $\vec{A}=[a_1,a_2,a_3]$ ו- $\vec{B}=[b_1,b_2,b_3]$ אז המכפלה הסקלרית האלגברית של $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הוא מספר (כלומר סקלר) שנסמן ב- $\vec{A}\cdot_a\vec{B}$. הוא נתון ע"י הנוסחה

$$[a_1,a_2,a_3]\cdot_a[b_1,b_2,b_3]=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

הגדרה גאומטרית: נתונים שני ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$. המכפלה הסקלרית הגאומטרית של $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ הוא מספר שנסמן ב- $\vec{A}\cdot_g\vec{B}$. הוא נתון ע"י הנוסחה

$$\vec{A}\cdot_g\vec{B}=\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos\measuredangle\vec{A},\vec{B}$$

משפט 3. עבור כל זוג של ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ מתקיים $\vec{A}\cdot_a\vec{B}=\vec{A}\cdot_g\vec{B}$.

הוכחה: נניח כי $\vec{A}=[a_1,a_2,a_3]$ ו- $\vec{B}=[b_1,b_2,b_3]$. יהי $\vec{C}$ הווקטור הנתון ע"י $\vec{C}=[b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3]$. לכן $\vec{C}$ מקיים $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$. (למעשה $\vec{C}=\vec{B}-\vec{A}$.)
אם נמקם את החיצים המיצגים את $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כך שזנבותיהם נמצאים באותה נקודה, אז, לפי (4), או לפי העובדה ש- $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$, אנו רואים שהחץ מראשו של $\vec{A}$ לראשו של $\vec{B}$ חייב ליצג את $\vec{C}$. נפעיל את משפט הקוסינוסים במשולש שנוצר ע"י החיצים הנ"ל עבור $\vec{A}$, $\vec{B}$ ו- $\vec{C}$. אז נקבל

$$\left\|\vec{C}\right\|^2=\left\|\vec{A}\right\|^2+\left\|\vec{B}\right\|^2-2\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos\measuredangle\vec{A},\vec{B}.$$

לכן

$$\begin{aligned}\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos\measuredangle\vec{A},\vec{B} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{A}\right\|^2+\left\|\vec{B}\right\|^2-\left\|\vec{C}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-\left((b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2\right)\right)\end{aligned}$$

כאשר פותחים את כל הסוגריים בביטוי בשורה האחרונה, הרבה איברים מצטמצמים ונשאר רק $\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3)$ אשר שווה כמובן ל- $\vec{A}\cdot_a\vec{B}$. **מש"ל**

אחרי שיודעים שמשפט זה נכון, מפסיקים להשתמש בסימונים $\vec{A}\cdot_a\vec{B}$ ו-$\vec{A}\cdot_g\vec{B}$, ובמקום שניהם פשוט רושמים $\vec{A}\cdot\vec{B}$.
(נזכיר סימון אחר $\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle$ שלפעמים משתמשים בו במקום $\vec{A}\cdot\vec{B}$.)

היטל של ווקטור $\vec{A}$ על ווקטור $\vec{B}$

בסעיף זה נניח תמיד כי $\vec{B}\neq\vec{0}$.
ברצוננו לכתוב את $\vec{A}$ בצורה

$$\vec{A}=\alpha\widehat{B}+\vec{C} \tag{5}$$

כאשר $\widehat{B}$ מסמן ווקטור יחידה בעל אותו כוון ומגמה כמו $\vec{B}$ ו- $\vec{C}$ הוא ווקטור ניצב ל- $\vec{B}$.
המספר α נקרא הרכיו של הווקטור $\vec{A}$ בכוון הווקטור $\vec{B}$.
הווקטור $\alpha\widehat{B}$ נקרא ההיטל של הווקטור $\vec{A}$ על הווקטור $\vec{B}$.
למשל, בפיסיקה, אם $\vec{A}$ הוא ווקטור של כוח (או מהירות), אזי α הוא הרכיב של הכוח הזה (או המהירות הזו) בכוון $\vec{B}$.

כמובן הווקטור $\widehat{B}$ נתון ע"י הנוסחה $\widehat{B} = \frac{1}{\|\vec{B}\|}\vec{B}$.

הגדרה גאומטרית של ההיטל.
נמקם את החיצים המיצגים את $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כך שזנבותיהם נמצאים באותו נקודה Q. יהי L הישר העובר דרך Q אשר מקביל לווקטור $\vec{B}$.
תהי P הנקודה על L הקרובה ביותר לראש של החץ של $\vec{A}$. ברור שהקטע מ P עד הראש של $\vec{A}$ חייב להיות ניצב לישר L. הווקטור הנתון ע"י החץ מ- Q ל- P, הוא הווקטור $\alpha\widehat{B}$ שאנו מחפשים.
ציור:
ברור מהציור ש-

$$\alpha = \left\|\vec{A}\right\| \cos\measuredangle\vec{A},\vec{B} \tag{6}$$

ז"א $\alpha > 0$ אם $\measuredangle\vec{A},\vec{B} < \pi/2$ ו- $\alpha < 0$ אם $\measuredangle\vec{A},\vec{B} > \pi/2$.
מהנוסחה (6) וההגדרה הגאומטרי של מכפלה סקלרית אנו מקבלים מייד כי

$$\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left\|\vec{B}\right\|} \quad \text{כלומר} \quad \alpha = \vec{A}\cdot\widehat{B}\ . \tag{7}$$

תרגיל 3.
(i) מההגדרה האלגברית של המכפלה הסקלרית הוכיחו כי

$$(\vec{U}+\vec{V})\cdot\vec{W} = \vec{U}\cdot\vec{W} + \vec{V}\cdot\vec{W}$$

עבור כל שלושה ווקטורים $\vec{U}$, $\vec{V}$ ו- $\vec{W}$. (שימו לב כי הסימן $+$ שמופיע פעמים בנוסחה הנ"ל מופיע בשני מובנים מאד שונים זה מזה.)
(ii) מההגדרות האלגבריות של כפל בסקלר והמכפלה הסקלרית הוכיחו כי

$$(\lambda\vec{U})\cdot\vec{V} = \lambda(\vec{U}\cdot\vec{V})$$

לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ ולכל שני ווקטורים $\vec{U}$ ו- $\vec{V}$. (שימו לב ש- $\lambda\vec{U}$ מסמן את הכפל של הסקלר λ בווקטור $\vec{U}$, אבל $\lambda(\vec{U}\cdot\vec{V})$ מסמן את כפל הרגיל של מספר λ במספר $\vec{U}\cdot\vec{V}$. מדובר בשני פעולות שונות.)
(iii) (חישוב מיידי) הוכיחו כי כל ווקטור $\vec{U}$ מקיים $\vec{U}\cdot\vec{U} = \left\|\vec{U}\right\|^2$.
(iv) הוכיחו באופן אלגברי, בעזרת שלושת החלקים הקודמים של התרגיל הזה, שהנוסחה (7) נובע מהנוסחה (5). יהיה בכל זאת גם מרכיב אחד גאומטרי בהוכחה זו: כאשר שני ווקטורים ניצבים זה לזה, מה המכפלה הסקלרית שלהם?

שימוש של המכפלה הסקלרית בפיסיקה. חישוב עבודה כמכפלה סקלרית של ווקטור כוחווקטור העתקה.

נניח שלקיק נע לארך קטע ישר מנקודה Q לנקודה P. הווקטור $\vec{B}$ המיוצג ע"י החץ מ- Q ל- P נקראת ווקטור ההעתקה (displacement vector) של החלקיק במקרה זה.
נניח שבזמן התנועה הנ"ל של החלקיק מופעל עליו כוח קבוע מיוצג ע"י הווקטור $\vec{A}$.
- אם הכוח מקביל ובעל אותו מגמה כמו ווקטור ההעתקה אז הפיסיקאיים אומרים לנו שהכוח מבצע עבודה אשר שווה לגודל הכוח כפול גודל ההעתקה. ז"א העבודה שווה ל- $\left\|\vec{B}\right\|\left\|\vec{A}\right\|$.

- אם הכוח מקביל להעתקה אבל בכוון הפוך[1], אזי העבודה היא שלילית, כלומר היא שווה ל- $-\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|$.
- אם הכוח ניצב לכוון ההעתקה, אז לא מבוצע שום עבודה, העבודה שוון ל- 0.
- באופן כללי בחישוב העבודה, גודל הכוח לא חשוב. אבל צריך לדעת את גודל **הרכיב** של הכוח בכיוון ההעתקה. העבודה שווה לרכיב זה כפול המרחק שנע החלקיק. ראינו שהרכיב הכוח המבוקש הוא המספר α אשר נתון ע"י הנוסחה (7). העבודה שווה ל- α כפול $\left\|\vec{B}\right\|$. מ- (7) נובע שהעבודה פשוט שווה ל- $\vec{A}\cdot\vec{B}$.

נתון ווקטור כלשהו $\vec{A}=[a_1,a_2,a_3]$. בדקו כי a_1 הוא ההיטל של $\vec{A}$ על $\widehat{\mathbf{i}}$, ובאופן דומה, a_2 ו- a_3 הם ההיטלים של $\vec{A}$ על $\widehat{\mathbf{j}}$ ו- $\widehat{\mathbf{k}}$ בהתאמה.
כמו כן מתקיים הנוסחה $\vec{A}=a_1\widehat{\mathbf{i}}+a_2\widehat{\mathbf{j}}+a_3\widehat{\mathbf{k}}$. אפשר לכתוב גם ש-

$$\vec{A}=(\vec{A}\cdot\widehat{\mathbf{i}})\widehat{\mathbf{i}}+(\vec{A}\cdot\widehat{\mathbf{j}})\widehat{\mathbf{j}}+(\vec{A}\cdot\widehat{\mathbf{k}})\widehat{\mathbf{k}}. \tag{8}$$

הנוסחאות האלו מראים לנו שאפשר לשחזר את הווקור $\vec{A}$ מהיטלים שלו על שלושת הווקטורים $\widehat{\mathbf{i}}$, $\widehat{\mathbf{j}}$ ו- $\widehat{\mathbf{k}}$. בסמסטר הבא אולי תלמדו את מקצוע "טורי פורייה והתמרות אינטגרליות" ושם תראו הכללה מאד מרשימה, אפילו גאונית, ומאד מאד שימושית, של הנוסחה (8). שם, במקום ווקטורים $\vec{A}$ ב- $\mathbb{R}^3$, יהיו "ווקטורים" במרחב אחר בעל מימד אינסופי. למעשה $\vec{A}$ יהיה פונקציה. במקום הווקטורים $\widehat{\mathbf{i}}$, $\widehat{\mathbf{j}}$ ו- $\widehat{\mathbf{k}}$ תשתמשו בסדרה אינסופית של פונקציות טריגונומטריות מתאימות כך שבנוסחה (8), במקום שלושה איברים, יופיעו אינסוף איברים.

המכפלה הווקטורית של שני ווקטורים:

הגדרה גאומטרית: עבור כל שני ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ ב- $\mathbb{R}^3$ נגדיר ווקטור חדש $\vec{A}\times_g\vec{B}$. ווקטור זה נקבע באופן חד-משמעי על ידי התכונות הבאות שלו:
(i). $\vec{A}\times_g\vec{B}$ ניצב ל- $\vec{A}$ וגם ניצב ל- $\vec{B}$.
(ii). $\left\|\vec{A}\times_g\vec{B}\right\|=\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\sin\measuredangle\vec{A},\vec{B}$

(iii). המגמה של $\vec{A}\times_g\vec{B}$ נקבע על ידי "חוק הבורג הימני". ליתר דיוק, נניח שזנבותיהם של החיצים המיצגים את $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ נמצאים באותה נקודה. נמקם מברג כך שצירו ניצב לשני החיצים האלו, ונסובב את המברג הזה מ- $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ דרך הזווית שהיא קטנה מ- π. סיבוב כזה יגרום לבורג רגיל, כלומר בורג ימיני, להתקדם בכוון (כלומר מגמה) שבו פונה הווקטור $\vec{A}\times_g\vec{B}$.

[1] Oops! כולם אומרים "כוון הפוך" אבל למעשה מתכוונים ל-"**מגמה** הפוכה".