

תרגילים מומלצים מאד בחדו"א נמ' (104011)

Version 4. 13/12/08

(תרגילים אלו צויינו בגידסות שונות של הסילבוס עבור חדו"א נמ').

תהי E הקבוצה $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. נתונה פונקציה $v : E \rightarrow \mathbb{R}$. בעלת התכונה ששתי הנגזרות u'_x ו- u'_y קיימות בכל נקודה של E ובנוסף הן מהוות פונקציות דיפרנציאביליות בכל נקודה של E . כמו-כן נתון ש- $v''_{xy} = v''_{yx}$. בכל נקודה של E . נגדיר פונקציה חדשה $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $u(x, y) = v(xy, x/y)$.
(א) הוכיחו כי $u''_{1,2} = u''_{2,1}$ בכל נקודה $(x, y) \in E$.
(ב) אם נתון ש-

$$xu'_x - yu'_y + x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} = 0$$

עבור כל $(x, y) \in E$, מצאו נוסחה עבור v''_{xy} והוכיחו בעזרת נוסחה זו כי $u(x, y) = f(xy) + g(x/y)$ עבור שתי פונקציות מתאימות של משתנה אחד $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ועבור כל $(x, y) \in E$.

רמזים: קודם מצאו נוסחאות עבור כל הנגזרות החלקיות בסדר ראשון ושני של u (החישובים קצת ארוכים אבל לא קשים). אחר כך, אחרי שמצאתם נוסחה עבור v''_{xy} , אל תשכחו את משפט Lagrange עבור פונקציות של משתנה אחת, וגם אל תשכחו את הנוסחה $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

מספר תרגילים מומלצים מ [C2] ו-[C3]

(יש גם פתרונות מפורטים לרובם בחוברת [C3]).

[C2]

עמ' 165

- 1 יהי V הגוף החסום ע"י המשטחים $z = 1$, $z = 0$ ו- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ כאשר a ו- b קבועים חיוביים. תהי S השפה של V . מורכבת משלושה משטחים: S_0 , S_1 , S_2 אשר נמצאים במישורים $z = 0$ ו- $z = 1$ בהתאמה, ו- S_2 אשר מוכל במשטח $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. יהי C_0 עקום החיתוך של S_0 ו- S_2 והי C_1 עקום החיתוך של S_1 ו- S_2 . נתון השדה $F = 5y\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. מצא את ערכי האינטגרלים הבאים גם ע"י חישוב ישיר וגם בעזרת משפטי גרין, גאוס וסטוקס. $\int_{C_0} F \cdot dr$, $\int_{C_1} F \cdot dr$, $\iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot dS$, $\iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times F) dV$.
- 2 יהי Γ עקום החיתוך של המשטחים $x^2 + z^2 = a^2$ ו- $y = xz$. חשב בעזרת משפט סטוקס, וגם באופן ישיר, את האינטגרל $\int_{\Gamma} x^2 \mathbf{j} \cdot dr$. (פתרונות לשני התרגילים האלה נמצאים בעמודים 166 עד 170 של [C2]).

[C3]

עמ' (ת5)

5 טמפרטורת חדר נתונה בכל נקודה ונקודה (x, y, z) ע"י הפונקציה $T(x, y, z) = e^{xyz+y^2}$. זבוב נמצא על פני שולחן $z = 3$ בנקודה $(1, 1, 3)$. באיזה כיוון עליו לנוע אם ברצונו להרגיש קצב עליה מקסימלי בטמפרטורה.

(א) אם הוא עף.

(ב) אם הוא עיף מדי לעוף, ולכן רק מטייל על פני השולחן.

(ראה תרגיל דומה: מס' 2 בעמ' 270 עם פתרון בעמ' 271).

עמ' 238

1 הפונקציה $f(x, y)$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון שהן רציפות בכל המישור, ולא קבועות. בנקודה $(-3, 6)$ ידוע ש $\nabla f(-3, 6) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. הפונקציה $g(x, y, z)$ מוגדרת ע"י $g(x, y, z) = f(x^2 - y^2, xyz)$. חשב את ∇g בנקודה $(1, 2, 3)$. (תשובה: $-6\mathbf{i} - 18\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$)

4 כדור קטן מוחזק בנקודה $(1, 1, 3)$ על פני המשטח $z = x^3 + xy + y^4$. משחררים את הכדור בעדינות מבלי לדחוף אותו והוא מתחיל לנוע על פני המשטח בכיוון וקטור A (שהוא וקטור תלת מימדי). (ניסוח יותר מדויק: A פונה בכיוון התאוצה ההתחלית של הכדור). (א) מצא וקטור מקביל ל **רכיב האופקי** של A . (ב) מצא וקטור מקביל ל A . (תשובה: $-4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 41\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$)

מקורות

[C2] מ. צוויקל, "מתמטיקה ח2", חוברת II, (אינטגרלים מרובים ואנליזה וקטורית).

[C3] מ. צוויקל, "מתמטיקה ח2", חוברת III, (תרגילים ופתרונות מבחינות).

<http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel/h2m/books-n06.html>