הנקודות הקרובות ביותר בשני ישרים מצטלבים

Version 1.01, 16/11/06

סימון: נתונות שתי נקודות P ו- Q ב- $\mathbb{R}^3$. נסמן ב- $\vec{PQ}$ את הווקטור אשר מיוצג ע"י החץ מ- P אל Q. אז הנורמה $\left\|\vec{PQ}\right\|$, כלומר, אורך הווקטור $\vec{PQ}$, הוא בדיוק המרחק (כלומר המרחק הרגיל) מ- P ל- Q.

אם נשתמש בסימון שמוגדר בהרצאות ב 13/11/06 וב- 15/11/06 אפשר גם לכתוב $\left\|\vec{PQ}\right\| = d_2(P,Q)$.

נתונים שני ישרים L_1 ו- L_2. נניח שהם מצטלבים. ברוצננו למצוא נקודה P_1 על L_1 ונקודה P_2 על L_2 כך ש-

$$\left\|\vec{P_1P_2}\right\| \leq \left\|\vec{Q_1Q_2}\right\| \quad \text{עבור כל בחירה של נקודות } Q_1 \in L_1 \text{ ו- } Q_2 \in L_2 . \qquad (1)$$

נניח שעבור $j = 1,2$, הישר L_j נתון ע"י משוואוגת פרמטריות: $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = x_j + a_j t \\ y = y_j + b_j t \\ z = z_j + c_j t \end{cases}$, כלומר L_j היא קבוצה $\{(x_j + a_j t, y_j + b_j t, z_j + c_j t) : t \in \mathbb{R}\}$. כאן a_j, b_j, c_j, x_j, y_j, z_j הם כולם מספרים ממשיים קבועים כאשר $j = 1$ ו- $j = 2$.

אם אתם מעדיפים, תבחרו ערכים בשביל כל ששת הקבועים הנ"ל ופתרו את התרגילים הבאים עבור המספרים שבחרתם.

(א). מצאו ווטקור $\vec{w}$ שהוא ניצב גם ל- L_1 וגם ל - L_2.

(ב). מצאו משוואה עבור המישור Π_2 שהוא מכיל את L_2 והוא **מקביל** ל- $\vec{w}$. (שימו לב, כתבתי "מקביל", **לא** "ניצב".)

(ג). מצאו את הקואורדינטות של נקודת החיתוך של הישר L_1 עם המישור Π_2. תהי P_1 הנקודה הזו.

(ד). הוכיחו כי הנקודה P_1 שמצאתם בסעיף **(ג)** מקיימת את התנאי

$$\left\|\vec{P_1Q_2}\right\| \leq \left\|\vec{Q_1Q_2}\right\|$$

עבור כל בחירה של נקודות $Q_1 \in L_1$ ו- $Q_2 \in L_2$.

(ה). נחשו איפה נמצאת הנקודה P_2 שהיא, יחד עם הנקודה הנ"ל P_1, מקיימת את התנאי (1). אחרי שנחשתם, רשמו הסבר מדויק מדוע הנקודות P_1 ו- P_2 אכן מקיימות את (1). מצאו את הקואורדינטות של P_2.

הערה: כמו שראינו בהרצאות, יש נוסחה אשר מאפשרת לנו למצוא את המרחק בין שתי הנקודות המיחדות האלו P_1 ו- P_2, מבלי למצוא איפה בדיוק הן נמצאות.
