קבוצות קשירות ב- $\mathbb{R}^n$.

Version 2, 20/11/06. The only difference from Version 1 is that a new exercise, Exercise 0, has been added.

תהי E קבוצה ב- $\mathbb{R}^n$. נאמר ש- E היא קבוצה **קשירה לפי קשתות** (arcwise connected) אם לכל שתי נקודות q_1 ו- q_2 ב- E, קיים עקום שמוכל כולו ב- E אשר מקשר בין q_1 ו- q_2.
כלומר, E קשירה לפי קשתות אם לכל q_1 ו- q_2 ב- E, קיימת קבוצה מן הצורה $\{(f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)) : t \in [a, b]\}$ כך ש-

- עבור כל $j = 1, 2, ..., n$, הפונקציה $f_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ היא רציפה,
- הנקודה $(f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ נמצאת ב- E עבור כל $t \in [a, b]$.
- עבור $t = a$ ו- $t = b$ הנקודות ב"קצוות" מקיימות $(f_1(a), f_2(a), ..., f_n(a)) = q_1$, ו- $(f_1(b), f_2(b), ..., f_n(b)) = q_2$.

רוב הזמן, במקום להגיד "קבוצה קשירה לפי קשתות" אנו פשוט אומרים "קבוצה קשירה" (או באנגלית אומרים "connected set"). בקורס זה אין צורך להבדיל, אבל בלימוד יותר מתקדם של טופולוגיה מגדירים "קבוצה קשירה לפי קשתות" ו"קבוצה קשירה" בשתי דרכים שונות, והן לא אותו דבר.

בשלב הזה התרגילים הבאים הם לא חובה, אבל הם בהחלט יכולים לעזור לכם להבין מה זה המושג של קשירות וגם איך עובדים בקבוצות ב- $\mathbb{R}^n$ כאשר $n > 3$, למרות שאי-אפשר לצייר את הקבוצות האלו.

0. נתון $n \in \mathbb{N}$, נתונה קבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$, ונתונות שלוש נקודות P_1, P_2 ו-P_3 ב-E. כמו-כן נתונים שני עקומים Γ_1 ו-Γ_2 אשר מוכלים ב-E וכך ש-Γ_1 מחבר את P_1 ל-P_2, ו-Γ_2 מחבר את P_2 ל-P_3. האם בהכרח קיים עקום Γ_3 אשר מוכל ב-E ומחבר את P_1 ל-P_3?
אם לא בהכרח קיים Γ_3 הראו זאת בעזרת דוגמא נגדית מתאימה. אם כן קיים עקום כזה Γ_3 הסבירו איך מקבלים הצגה פרמטרית עבורו.

1. הראו שעבור כל קבוע c, הקבוצה $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c^2\}$ היא קבוצה קשירה. עבור כל זוג של נקודות ב- E רשמו תאור מדויק של עקום ב- E אשר מחבר בינהן.

2. הראו שעבור כל קבוע c, הקבוצה $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = c^2\}$ היא קבוצה קשירה.
הצעה: קודם מצאו עקום ב-E אשר מחבר בין שתי נקודות (x_1, y_1, z_1) ו- (x_2, y_2, z_2) ב- E במקרה המיוחד ש- $z_1 = z_2$. (אפשר להעזר בתרגיל 1.) אחר-כך מצאו איך לחבר בין (x_1, y_1, z_1) ו- (x_2, y_2, z_2) כלליות ב- E.

3. הראו שעבור כל קבוע c, הקבוצה $E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = c^2\}$ היא קבוצה קשירה.
הצעה: השתמשתם בתרגיל 1 כדי לעזור בפתרון תרגיל 2. באופן אנלוגי, אפשר (איך?) להעזר בתרגיל 2 כדי לפתור את תרגיל 3.

4. ברור שב- $\mathbb{R}^n$, כאשר n הוא 1, 2 או 3, ועבור כל $q \in \mathbb{R}^n$ וכל $r > 0$, הכדור $B_2(q, r)$ וגם הכדור (או "קוביה") $B_\infty(q, r)$ שניהם קבוצות קשירות לפי קשתות. קל להראות איך לבחור עקום בהם אשר מחבר בין שתי נקודות כלשהן בהם.
אבל מה קורה כאשר $n > 3$? נניח כעת כי $n = 4$. האם ב- $\mathbb{R}^4$ הקבוצה $B_\infty(0, r)$ היא קשירה? האם $B_2(0, r)$ קשירה?

5. נתונות שתי קבוצות קשירות A ו- B ב- $\mathbb{R}^3$. נניח ש- $A \cap B$ לא ריקה. האם גם $A \cap B$ היא בהכרח קשירה? האם $A \cup B$ בהכרח קשירה?
