טוגעוקטוגעוק=0

מיכאל צוויקל,

אמאדו 730 ,

,(829)-4179

ימי ב' 12:30-13:30.

mcwikel@math.technion.ac.il

http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel

http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel/fourier

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx$$

התמרת לפלס (Laplace)

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

מדע בידיוני:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\left[2\pi f(x)\chi_{[0,\infty))}(x)\right]dx \\ &= 2\pi \widehat{f\chi_{[0,\infty)}}(-is) \text{ ?????????????}\end{aligned}$$

כי $e^{-sx} = e^{-i(-is)x}$????????

דוגמא: $f(x) = e^{\gamma x}$ **כאשר** $\gamma = \alpha + i\beta$, קבוע.

$f(x)=e^{\gamma x}=e^{(\alpha+i\beta)x}$ עבור כל $s=\sigma+i\tau$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}e^{\gamma x}dx=\int_0^\infty e^{(\gamma-s)x}dx\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(\gamma-s)x}dx\\
&= \lim_{R\to\infty}\left.\frac{e^{(\gamma-s)x}}{(\gamma-s)}\right|_0^R=\lim_{R\to\infty}\frac{e^{(\gamma-s)R}}{(\gamma-s)}-\frac{1}{\gamma-s}\\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{e^{(\alpha-\sigma)R}\cdot e^{i(\beta-\tau)R}}{(\gamma-s)}-\frac{1}{\gamma-s}\\
&= \frac{1}{s-\gamma}\ ,
\end{aligned}$$

אם ורק אם $\sigma>\alpha$.

$\mathcal{L}[e^{\gamma x}](s)=\dfrac{1}{s-\gamma}$ אם ורק אם $\sigma>\alpha$, ז"א $\operatorname{Re}s>\operatorname{Re}\gamma$.

$\mathcal{L}[e^{\gamma x}](s) = \dfrac{1}{s-\gamma}$. מסקנות: לכל s כך ש $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[1](s) &= \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}[e^{i\beta x}](s) &= \frac{1}{s - i\beta} \\
\mathcal{L}[\cos\beta x](s) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{i\beta x}] + \mathcal{L}[e^{-i\beta x}]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\beta} + \frac{1}{s+i\beta}\right) \\
&= \frac{s}{s^2+\beta^2} \\
\mathcal{L}[\sin\beta x](s) &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{i\beta x}] - \mathcal{L}[e^{-i\beta x}]\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\beta} - \frac{1}{s+i\beta}\right) \\
&= \frac{\beta}{s^2+\beta^2}.
\end{aligned}$$

כאמור, רק לכל s כך ש $\operatorname{Re} s > 0$.

הגדרה: עבור קבועים $K>0$, ו $a\in\mathbb{R}$, יהי $B(K,a)$ אוסף כל הפונקציות $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ כך ש f רציפה למקוטעין ו-

$$|f(x)|\le Ke^{ax}$$

לכל $x\in[0,\infty)$.

משפט: יהי f ב- $B(K,a)$, אזי $\mathcal{L}[f](s)$ התמרת לפלס של f, מוגדרת עבור כל s, כך ש $s>a$, ולמעשה עבור כל s ב- $\mathbb{C}$ כך ש- $\operatorname{Re} s>a$.

הוכחה: נרשום $s=\sigma+i\tau$. נניח ש- $\sigma>a$. הפונקציה $x\mapsto e^{-sx}f(x)$ רציפה למקוטעין ב- $[0,\infty)$ ו-

$$\left|e^{-sx}f(x)\right|=e^{-\sigma x}\left|f(x)\right|\le e^{-\sigma x}e^{ax}K=e^{(a-\sigma)x}K\ .$$

כמו בחישוב הנ"ל של $\mathcal{L}[e^{\gamma x}](s)$, פונקציה זו אינטגרבילית בהחלט כאשר $\sigma>a$. **מש"ל.**

תכונות בסיסיות של התמרת לפלס

ליניאריות:

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s) \qquad (*)$$

ליתר דיוק, נניח ש $f \in B(K_1, a_1)$ ו $g \in B(K_2, a_2)$,
אזי $\alpha f + \beta g \in B(K_3, a_3)$
כאשר $a_3 = \max\{a_1, a_2\}$ ו- $K_3 = |\alpha| K_1 + |\beta| K_2$,
ו- $(*)$ מתקיים עבור $\operatorname{Re} s > a_3$.

התמרה של נגזרת:

נניח ש- $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ רציפה ובעלת נגזרת f' פרט אולי בנקודות בודדות, ו f' רציפה למקוטעין.

ליתר דיוק:

משפט: נניח ש $f\in B(K,a)$ ושקיימת פונקציה $g:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ רציפה למקוטעין כך ש $f(x)=f(0)+\int_0^x g(t)dt$ לכל $x\geq 0$.

(ז"א f' קיימת ושווה ל g פרט לנקודות קפיצה של g.)

אזי, $\mathcal{L}[g](s)$ קיימת לכל s כך ש $\operatorname{Re}s>a$ ו-

$$\mathcal{L}[g](s)=s\mathcal{L}[f](s)-f(0)\ .$$

מקובל לכתוב

$$\mathcal{L}[f'](s)=s\mathcal{L}[f](s)-f(0)$$

למרות ש f' אולי לא קיימת בנקודות מסויימות.

איך מוכיחים?
ההוכחה נובעת מאינטגרציה לפי חלקים. ההוכחה מאד דומה להוכחה שבתנאים מתאימים הנגזרת ϕ' של התמרת פורייה של פונקציה מתאימה ϕ מקיימת $\widehat{\phi'}(\omega) = i\omega\widehat{\phi}(\omega)$.

מסקנה: אם, בנוסף, f' רציפה וב- $B(K,a)$ ואם f'' רציפה למקוטעין נקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

באופן יותר כללי: אם f וכל נגזרותיה f', f'', f''', ..., $f^{(n-1)}$ כולן רציפות וב- $B(K,a)$, ואם $f^{(n)}$ רציפה למקוטעין, אזי לכל s כך ש- $\operatorname{Re} s > a$ נקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \\ &\quad ..... - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

נגזרת של התמרה:

במקרה של התמרת פורייה קיבלנו, בתנאים מתאימים, ש- $\frac{d}{d\omega}\widehat{\phi}(\omega) = -i\widehat{(x\phi(x))}$ ולכן $\frac{d^n}{d\omega^n}\widehat{\phi}(\omega) = (-i)^n\widehat{(x^n\phi(x))}$.

כאן נקבל:

משפט: אם $f \in B(K,a)$, אזי לכל s כך ש $\operatorname{Re} s > a$ ולכל $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s).$$

הערה: אם $f \in B(K,a)$ אזי התמרה $\mathcal{L}[t^n f(t)](s)$ מוגדרת עבור כל s כך ש $\operatorname{Re} s > a$, ועבור כל n ב- $\mathbb{N}$.

הסבר: ניקח s כלשהו כך ש $\operatorname{Re} s > a$. אזי קיים a_1 כך ש- $\operatorname{Re} s > a_1 > a$. לכל $t \geq 0$ נקבל ש-

$$|t^n f(t)| \le t^n K e^{at} = t^n e^{(a-a_1)t} K e^{a_1 t}$$

מכוון ש $a-a_1<0$, הפוקנציה $t^n e^{(a-a_1)t}$ חסומה ב- $[0,\infty)$, וכמו קודם $e^{-st}Ke^{a_1 t}$ אינטגרבילית עבור $\operatorname{Re} s > a_1$.

רעיון של הוכחת המשפט: נטפל במקרה ש- $n=1$.

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}[f(t)](s+h) - \mathcal{L}[f(t)](s)}{h} &= \int_0^\infty \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} f(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \frac{e^{-ht} - 1}{h} f(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} t f(t) \frac{e^{-ht} - 1}{th} dt.
\end{aligned}$$

ברור ש- $\lim_{h\to 0} \frac{e^{-ht}-1}{th} = -1$.

כדי להצדיק ש- “$\lim_{h\to 0}\int_0^\infty = \int_0^\infty \lim_{h\to 0}$” $(**)$ משתמשים במשפט ההתכנסות הנשלטת של Lebesgue.

====================

אם $h>0$ אז

$$\left|\frac{e^{-ht}-1}{th}\right| = \frac{1-e^{-ht}}{th} = \frac{1}{th}\int_{-ht}^{0} e^y dy \le \frac{1}{th}\int_{-ht}^{0} 1dy = 1$$

ואם $h<0$ אז

$$\left|\frac{e^{-ht}-1}{th}\right| = \frac{e^{|h|t}-1}{t|h|} = \frac{1}{t|h|}\int_{0}^{|h|t} e^y dy \le \frac{1}{t|h|}\int_{0}^{|h|t} e^{|h|t} dy = e^{|h|t}.$$

עבור s כך ש $\operatorname{Re} s > a_1 > a$, ועבור כל h כך ש $|h| < \frac{1}{2}(a_1-a)$, נקבל

$$\left|e^{-st}tf(t)\frac{e^{-ht}-1}{th}\right| \le e^{-a_1 t}tKe^{at}e^{|h|t} = Kte^{(-a_1+a+|h|)t} \le Kte^{\frac{1}{2}(a-a_1)t}.$$

זו פונקציה אינטגרבילית ב-$[0,\infty)$ אשר לא תלויה ב h. $(**)$ מוצדק!!

====================

כפל בפונקציה e^{bt} :

אם $f \in B(K,a)$ אזי $e^{bt}f(t)$ ב- $B(K,a+b)$ ו-

$$\mathcal{L}[e^{bt}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-b)$$

לכל s כך ש $\operatorname{Re} s > a+b$.

הוכחה: תרגיל קל.

התמרה של פונקציה "מוזזת" (לא בדיוק מוזזת) :

נניח ש- $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ היא פונקציה כך שהתמרת לפלס $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדרת עבור ערכים מסויימים של s.

עבור קבוע $c>0$ נגדיר $g:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ ע"י $g(t)=\begin{cases}0 & ,\ 0\le t\le c\\ f(t-c) & ,\ t>c\end{cases}$. מקובל להשתמש בסימון

$$g(t)=u_c(t)f(t-c)$$

כאשר $u_c(t):=\begin{cases}0\ ,\ 0\le t\le c\\ 1\ ,\ t>c\end{cases}$ נקראת פונקצית Heaviside.

אזי $\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)](s)$ קיימת עבור כל אותם ערכים של s, ו-

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)](s)=e^{-cs}\mathcal{L}[f](s).$$

הוכחה: תרגיל פשוט בהחלפת משתנים באינטגרציה.

תכונות נוספות:

התמרה של $f(\alpha t+\beta)$: ניקח רק $\beta \geq 0$ ו- $\alpha > 0$, מדוע?

תרגיל: נניח ש $f \in B(K,a)$. אזי הפונקציה $g(t) = f(\alpha t+\beta)$ היא ב $B(K_2,a_2)$ כאשר $K_2 =?$, $a_2 =?$. מצאו נוסחא המקשר בין $\mathcal{L}[f]$ ו- $\mathcal{L}[g]$.

תרגילים נוספים:

חשבו את $\mathcal{L}[t^n](s)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

חשבו את $\mathcal{L}[e^{at}\sin bt](s)$ לכל a ו- b קבועים ממשים.

משפט: נניח ש- $f \in B(K,a)$ עבור $K > 0$ ו- $a \in \mathbb{R}$ מסויימים. אזי

$$\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$$

כאשר מתיחסים ל- s כמשנתנה ממשי. או, בגירסה יותר כללית

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \left[\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \mathcal{L}[f](\sigma+i\tau)\right] = 0 \ .$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}[f](\sigma+i\tau)| &= \left|\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)x} f(x)dx\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-(\sigma+i\tau)x} f(x)\right| dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\sigma x} |f(x)|\, dx \le \int_0^\infty e^{-\sigma x} K e^{ax} dx \\
&= K \int_0^\infty e^{(a-\sigma)x} dx \\
&= \frac{K}{\sigma - a}
\end{aligned}$$

לכל a $\sigma >$. ניקח את הגבול כאשר $\sigma \to +\infty$. מש"ל.

פתרון משוואות דיפרנציאליות רגילות בעזרת התמרת לפלס.

(רק משוואת מסוימות עם תנאים מסוימים, ועל הקטע $[0,\infty)$.)

דוגמא: מצאו פונקציה $y:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ אשר מקיימת

$$(*)\ \begin{cases} y''(t)-y'(t)-6y(t)=0\ ,\ t\geq 0 \\ y(0)=1, y'(0)=-1 \end{cases}$$

פתרון: נניח (נקווה!) ש- y, y' ו- y'' מקיימות כל תנאי המשפטים הנ"ל עבור התמרות לפלס של נגזרות.

נסמן $Y(s)=\mathcal{L}[y](s)$. אז מ- $(*)$ נקבל

$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]-[sY(s)-y(0)]-[6Y(s)]=0$.

ז"א $[s^2Y(s)-s+1]-[sY(s)-1]-6Y(s)=0$

ז"א $Y(s)\left(s^2-s-6\right)-s+2=0$.

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2-s-6}$$

עכשיו נחפש פונקציה $y:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ כך ש- $\mathcal{L}[y](s)=\frac{s-2}{s^2-s-6}$.

$$\begin{aligned}\frac{s-2}{s^2-s-6} &= \frac{s-2}{(s-3)(s+2)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}\\ &= \frac{1/5}{s-3}+\frac{4/5}{s+2}.\end{aligned}$$

מכוון ש- $\mathcal{L}[e^{ct}]=\frac{1}{s-c}$ אנו ראוים שאפשר לבחור

$$y(t)=\frac{1}{5}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}\ .$$

האם זו באמת פתרון לבעיה הנ"ל ?

באופן יותר כללי: אם $\begin{cases} ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0\ ,\ t\geq 0\\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1\end{cases}$ ואם

$Y=\mathcal{L}[y]$, ואם y, y' ו- y'' מקיימות תנאים מתאימים, נקבל ש-

$$Y(s)=y_0\frac{as+b}{as^2+bs+c}+y_1\frac{a}{as^2+bs+c}\,.$$