

בהרצאה היום (12.6.06) נתתי לכם הוכחה של העובדה הבאה:  
אם  $f \in G(\mathbb{R})$  ואם הנגזרת החד צדדית  $f'_+(x)$  קיימת בנקודה מסויימת (קבועה)  $x$ , אזי

$$(1) \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \frac{f(x+)}{2}.$$

הנה הוכחה אחרת של (1). היא יותר נחמדה ויותר קצרה מזו של הרצאה. אבל יש רק בעיה אחת עם ההוכחה הנחמדה בעמוד זה. היא לא נכונה!  
מצאו את השגיאה. (מדובר על שגיאה מתמטית, לא בשגיאות בעברית!)  
לכל  $M > 0$  נשתמש בהחלפת משתנים  $y = Mt$ , ונקבל כי

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin Mt}{t} dt &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\sin Mt}{t} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{MR} \frac{\sin y}{y} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} I(M) &:= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt - \frac{f(x+)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt - \frac{1}{\pi} f(x+) \int_0^\infty \frac{\sin Mt}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (f(x+t) - f(x+)) \frac{\sin Mt}{t} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

נגדיר פונקציה עזר  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ע"י

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

אז אפשר לכתוב את הביטוי  $I(M)$  אשר הוגדר ב-(2) בצורה

$$I(M) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(t) \sin Mt dt.$$

הגבולות החד צדדיות  $f(t+)$  ו-  $f(t-)$  קיימות עבור כל  $t \in \mathbb{R}$ . מזה נובע שהגבולות החד צדדיות  $g(t+)$  ו-  $g(t-)$  קיימים עבור כל  $t > 0$ . כמובן הם קיימים עבור כל  $t < 0$ . בנקודה  $t = 0$  מתקיים  $g(0-) = 0$  וגם  $g(0+) = f'_+(0)$ . בכל קטע חסום  $[a, b]$  יש לכלל היותר מספר סופי של נקודות  $t$  שבהן  $f(t+) \neq f(t-)$ . לכן מתקיים  $g(t+) = g(t-)$  עבור כל הנקודות  $t$  של אותו קטע  $[a, b]$  פרט אולי למספר סופי של נקודות. משיקולים אלו אנו מקבלי ש-  $g$  רציפה למקוטעין ב-  $\mathbb{R}$  כולו.

נתון ש-  $|f(x)|$  אינטגרבילית ב-  $\mathbb{R}$  ו-  $g$  רציפה למקוטעין על הקטע  $(0, 1)$ . כמו-כן ברור ש-  $1/t$  רציפה בקטע  $[1, \infty)$  ושואף ל- 0 כאשר  $t$  שואף ל-  $+\infty$ . מהעבודות האלו נובע ש-  $|g(x)|$  אינטגרבילית ב-  $(0, 1)$ , וגם כמובן ב-  $(-\infty, 0]$ .

לכן  $g \in G(\mathbb{R})$  ונשתמש בלמה שהוכח בהתחלת ההרצאה כדי לקבל ש-

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} I(M) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(t) \sin Mt dt = 0.$$

מזה נקבל מייד את (1) וכך גמרנו את ההוכחה. (???)

**הערה:** למרות שהוכחה זו לא נכונה, היא כן נכונה במקרים מסויימים (ולא לגמרי טריביאליים). אולי תוכלו לזהות את המקרים האלו.