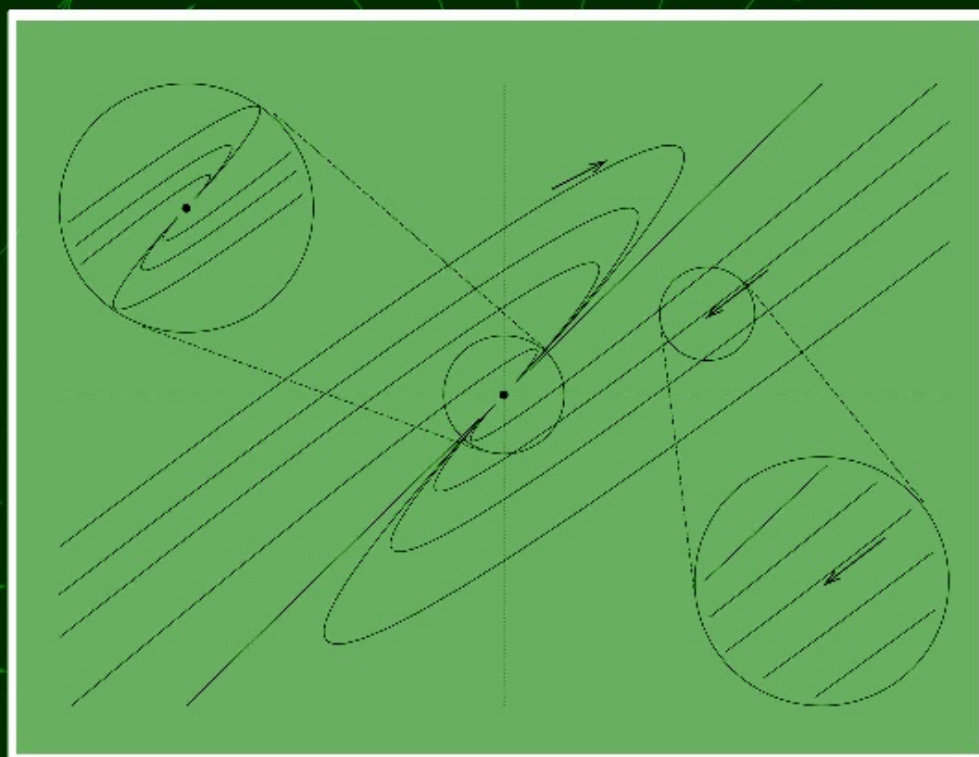


מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות

אורי אליאש



הפקולטה למתמטיקה
הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

מבוא למשואות דיפרנציאליות רגילות

אורי אליאש

הפקולטה למתמטיקה - הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל

אין להעתיק, לצלם, או לתרגם את הספר או כל חלק ממנו בצורה כלשהי או באמצעים כלשהם, לרבות הקלטה ואיחסון במאגר מידע, אלא באישור בכתב מהמחבר.

© כל הזכויות שמורות לאורי אליאש, 2009.

This work is subject to copyright. No part of this book may be reproduced by any mechanical, photographic, or electronic process, transmitted or otherwise copied for public or private use, without written permission from the author.

© All rights are reserved to Uri Elias, 2009.

תוכן עניינים

1	מהי משואה דיפרנציאלית רגילה?	1
1	מה החיה הזאת?	1.1
2	דוגמאות ומודלים	1.2
6	משואות דיפרנציאליות מסדר ראשון	2
6	שיטות פתרון אחדות	2.1
6	משואות לינאריות מסדר ראשון	2.1.1
14	משואות ניתנות להפרדה	2.1.2
17	פתרון על ידי הצבה	2.1.3
20	משואות מדויקות	2.1.4
26	גורמי אינטגרציה	2.1.5
28	משואות מהצורה $y'' = f(y)$	2.1.6
30	נושאים גיאומטריים	2.2
30	שדה כוונים	2.2.1
32	משפחות עקומים אורתוגונליים	2.2.2
34	תרגילים	2.3
39	משפטי קיום ויחידות לבעיות התחלה	3
39	דיון במשפט הקיום והיחידות ודוגמאות	3.1
45	רמז להוכחת משפט הקיום	3.2
46	הוכחת קיום הפתרון	3.3
51	הוכחת יחידות הפתרון	3.4
53	שמושים ליחידות הפתרון	3.5
55	שמושים לקיום פתרון	3.6

58	קיום פתרון גלובלי	3.7
60	מושג היציבות	3.8
63	משפט קיום ויחידות למשוואה מסדר גבוה	3.9
64	תרגילים	3.10
69	משוואות לינאריות מסדר כלשהו	4
69	תזכורת מאלגברה לינארית	4.1
70	משפט קיום ויחידות למשוואות לינאריות	4.2
73	משוואות לינאריות הומוגניות	4.3
76	אפיון מרחב הפתרונות	4.4
82	הורונסקיאן ונוסחת Abel	4.5
87	הורדת סדר משוואה	4.6
90	משוואות עם מקדמים קבועים	4.7
98	התנהגות איכותית ויציבות	4.8
101	משוואת Euler	4.9
104	משוואות לינאריות בלתי הומוגניות	4.10
107	שיטת וריאצית הפרמטרים	4.11
112	שיטת השוואת המקדמים	4.12
120	תרגילים	4.13
126	מערכות של משוואות דיפרנציאליות	5
126	מערכות של משוואות ומשפט קיום ויחידות	5.1
129	מערכות של משוואות לינאריות	5.2
131	מערכת הומוגנית ומבנה פתרונותיה	5.3
136	נוסחת Abel למערכת	5.4
138	מטריצה יסודית	5.5
139	מערכות עם מקדמים קבועים	5.6
141	מערכות עם בסיס של וקטורים עצמיים	5.6.1
146	מערכות להן אין בסיס של וקטורים עצמיים	5.6.2
153	מערכות בלתי הומוגניות	5.7
157	תרגילים	5.8

161	התיאוריה האיכותית ומישור הפאזה	6
161	מסלולים ונקודות קריטיות במישור הפאזה	6.1
166	מערכת לינארית במישור הפאזה - מיון	6.2
181	הפרעות קטנות במקדמי מערכות לינאריות	6.3
183	הערות על מערכות בלתי לינאריות במישור הפאזה	6.4
186	תרגילים	6.5
189	פתרון משואות דיפרנציאליות בעזרת טורי חזקות	7
189	תזכורת על טורי חזקות	7.1
192	פתרון משואות דיפרנציאליות בעזרת טורי חזקות	7.2
199	פתרון סביב נקודה סינגולריות-רגולרית	7.3
209	אינדקסים שוים	7.4
213	אינדקסים הנבדלים בשלם חיובי	7.5
216	משואת Bessel	7.6
220	תרגילים	7.7
223	התמרת לפלס	8
223	הגדרת התמרת לפלס	8.1
227	שמוש לבעיות התחלה	8.2
231	תכונות נוספות של התמרת לפלס	8.3
235	קונוולוציה	8.4
237	פונקציות מדרגה	8.5
240	"פונקצית" Dirac	8.6
245	תרגילים	8.7
247	נספח: מסלולי כוכבי הלכת	9
252	נספח: הערות היסטוריות	10
255	האותיות היווניות	
256	ביבליוגרפיה	
258	מפתח	

מבוא

רשימות אלה נערכו על פי הרצאות בקורסים אחדים של משואות דיפרנציאליות רגילות שלימדתי בטכניון לתלמידי פקולטות הנדסיות ומדעיות שונות.

מטרת הרשימות היא לשמש כלי עזר ללמוד עצמי. לפיכך ההסברים מפורטים ומוצגים באותו סגנון בו מרצה מדבר בפני כיתה. ניסיתי לנחש מהן הנקודות העדינות בהן יכול הלומד להתקל ולהכשל וניסיתי להקדים רפואה למכה. דוגמאות ותרגילים מנחים פועלים באותה מגמה.

החומר המתואר כאן רחב ממה שנלמד בקורס סטנדרטי בן 28 שעות הרצאה. יש רמזים, הערות, מוטיווציות מועילות, הרחבות, הסברים מדוע נעשה כך ולא אחרת. כשיש גישות אלטרנטיביות לנושא, תארתי לעיתים את שתיהן. כללו של דבר, כל אותן תוספות שמרצה היה רוצה לומר אך אינו מספיק בקורס שממדיו נקצבים על ידי מגבלות הזמן. והזמן, כידוע, לעולם אינו מספיק.

פתרון משואות דיפרנציאליות כרוך בעבודה טכנית שגרתית. בספר זה ניסיתי להוסיף לזה את הרעיונות המסתתרים מאחרי הקלעים, משהו מן האינטואיציה המאפשרת להבין את ההתנהגות האיכותית של משואות ופתרונותיהן וגם קצת מן היופי שבהבנה "כיצד פועל יצור זה הנקרא משואה דיפרנציאלית?"

אני מודה לפרופ' יהודה פינצ'ובר ולדר' לידיה פרס הרי על הערותיהם המועילות על כתב היד של ספר זה. אני מודה לטכניון - מכון טכנולוגי לישראל על תמיכתו בהוצאתו לאור של ספר זה.

אורי אליאש

חיפה, תשס"ט

טעות לעולם חוזרת. אם מצאת שגיאה בספר, אנא הודע על כך למחבר בכתובת
elias@technion.ac.il