בעיה הלקוחה מגיאומטריית המקדשים היפנית

אליהו לוי

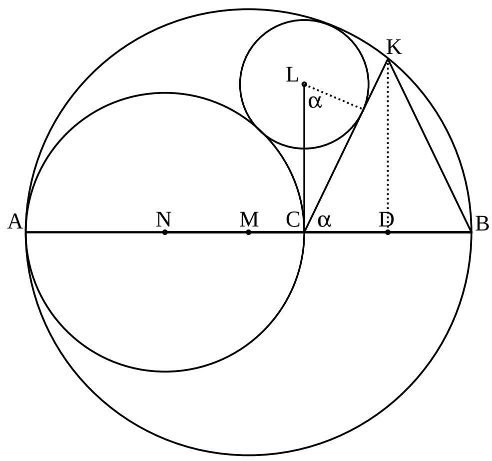
בין השנים 1639 עד 1854 סגרו השוגונים מבית טוקוגאווה את יפן באופן הרמטי מהעולם החיצון. בין השאר רעיונות מערביים, ביניהם הישגי ההתעוררות המדעית באירופה, לא יכלו כמעט לחדור ליפן. אבל בתקופת בידוד זו המשיכה התרבות היפנית להתפתח מתוך עצמה.

בתקופה זו, אוהבי מתמטיקה יפנים, סמוראים, סוחרים ואיכרים, היו מציגים ופותרים בעיה, בדרך כלל גיאומטרית, מציירים את הבעיה בצבעים בלוחית עץ יפהפיה, שנקראה sangaku (לוחית מתמטית), ותולים אותה תחת גגו של בניין מקודש. היתה זו גם העלאת מנחה לישות עליונה, וגם הצגת אתגר בפני באי המקדש: נראה אם תפתרו זאת! במאות ה 18 וה 19 הופיעו ביפן ספרים שאספו sangaku כאלה. לוחיות וספרים אלה הם באותה מידה קובצי בעיות מתמטיות כמו יצירות אמנות מרהיבות.

על ה sangaku אפשר לקרא במאמר שהופיע ב Scientific American, גליון מאי 1998, שבו מובאות דוגמאות עם תמונות ורפרודוקציות של לוחיות.

לרוב בעיות ה sangaku יש סגנון מיוחד. הן מרבות לעסוק במעגלים, ריבועים, אליפסות, וכדורים במרחב, הנוגעים זה בזה. הבעיה הבאה, שמופיעה בעמ' 65 במאמר הנזכר, שונה קצת מהשאר. זהו משפט גיאומטרי מעניין, שלא ראיתי בשום מקום אחר. אביא הוכחה שלו בעזרת גיאומטריה אנליטית, אבל לא ידועה לי הוכחה "גיאומטרית" שלו. אשמח מאוד אם הקוראים ימצאו וישלחו הוכחה "גיאומטרית" כזו. (למרות שסיינטיפיק אמריקן הבטיחו לפרסם פתרון של הבעיות באתר שלהם, אני לא הצלחתי למצוא את זה שם).

<u>להוכיח את המשפט הבא:</u> יהי AB הקוטר של מעגל $\mathcal{M}$, ותהי C נקודה על AB . יהי $\mathcal{N}$ המעגל שקוטרו AC ונבנה משולש שווה־שוקיים $\triangle CKB$ שבסיסו הוא CB וקודקודו K נמצא על המעגל $\mathcal{M}$. יהי $\mathcal{L}$ מעגל המשיק מבפנים ל $\mathcal{M}$, ומבחוץ ל $\mathcal{N}$ ול $\triangle CKB$. אז מרכזו L של $\mathcal{L}$ נמצא בדיוק מעל ל C , כלומר הישר LC מאונך ל AB .



<u>הוכחה בעזרת גיאומטריה אנליטית:</u> יהיו M ו N מרכזי $\mathcal{M}$ ו $\mathcal{N}$ בהתאמה, ויהי D אמצע CB . נבחר מערכת צירים בעלת מרכז M בה רדיוס $\mathcal{M}$ הוא 1 , ויהי רדיוס $\mathcal{N}$ שווה ל r . מכיוון ש N הוא אמצע AC ו D הוא אמצע CB , $ND = \frac{1}{2} \cdot AB = 1$. מכאן, ומכך ש $AM = 1$ נובע ש $MD = AN = r$. במשולש ישר־הזווית MDK היתר $MK = 1$ ו $MD = r$, ולכן, לפי משפט פיתגורס $DK = \sqrt{1-r^2}$. תהי $\alpha := \sphericalangle KCB$. אז

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{KD}{CD} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r} = \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \\ \cos\alpha &= \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{1+r}{1-r}}} = \sqrt{\frac{1-r}{2}} \end{aligned}$$

נזכיר ששיעורי C הם $C = (2r-1, 0)$, כי $A = (-1, 0)$ ו $AN = NC = r$.

תהי כעת L' הנקודה ששיעוריה

$$L' = \left(2r-1, \frac{2r}{1+r}\sqrt{2(1-r)}\right)$$

ברור ש $L'C$ מאונך ל AB . המשפט יוכח אם נוכיח ש L' היא המרכז L של $\mathcal{L}$, כלומר שהמרחקים מ L' למעגל $\mathcal{M}$, למעגל $\mathcal{N}$ ולישר CK שווים.

מרחקו של L' מהישר CK הוא:

$$L'C \cdot \cos\alpha = \frac{2r}{1+r}\sqrt{2(1-r)} \cdot \sqrt{\frac{1-r}{2}} = \frac{2r(1-r)}{1+r}.$$

מרחקו של L' מהמעגל $\mathcal{M}$ הוא:

$$1 - L'M = 1 - \sqrt{(2r-1)^2 + \left(\frac{2r}{1+r}\right)^2 \cdot 2(1-r)} = 1 - \frac{1}{1+r}\sqrt{(1+r)^2(2r-1)^2 + 8r^2(1-r)} =$$
$$= 1 - \frac{1}{1+r}\sqrt{(2r^2-(1-r))^2 + 8r^2(1-r)} = 1 - \frac{1}{1+r}\sqrt{(2r^2+(1-r))^2} = 1 - \frac{2r^2+1-r}{1+r} =$$
$$= \frac{1+r-2r^2-1+r}{1+r} = \frac{2r(1-r)}{1+r}.$$

(יש לבחור את השורש החיובי, ואכן $2r^2+1-r = (1-\frac{1}{2}r)^2 + \frac{7}{4}r^2 > 0$).

ולבסוף, מרחקו של L' מהמעגל $\mathcal{N}$ הוא (נזכיר ש $N = (-1+r, 0)$):

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{2r}{1+r}\right)^2 \cdot 2(1-r)} - r = r\left(\sqrt{1 + \frac{8(1-r)}{(1+r)^2}} - 1\right) = r\left(\sqrt{\frac{(1+r)^2+8(1-r)}{(1+r)^2}} - 1\right) =$$
$$= r\left(\sqrt{\frac{r^2-6r+9}{(1+r)^2}} - 1\right) = r\left(\frac{3-r}{1+r} - 1\right) = r\frac{2-2r}{1+r} = \frac{2r(1-r)}{1+r}.$$

(יש לבחור את השורש החיובי $3-r$).

ובכך הוכח המשפט.

האם הקוראים יכולים למצוא הוכחה "גיאומטרית"?